

CIRCUITOS LC.**Ejercicios Resueltos:**

1. Se requiere construir un circuito LC para producir oscilaciones de una frecuencia igual a 8.0×10^3 Hz. ¿Qué inductancia se requiere si se dispone de un capacitor de $0.20 \mu\text{F}$?

La frecuencia angular está dada por

$$\omega = 2\pi f = 2\pi * 8 \times 10^3 \text{ s}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Despejando el valor de la inductancia se obtiene

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(2\pi * 8 \times 10^3 \text{ s}^{-1})^2 (2 \times 10^{-7} \text{ F})} = 1.98 \text{ mH}$$

2. Un circuito LC consta de un inductor de $5.0 \times 10^{-2} \text{ H}$ y un capacitor de $5.0 \times 10^{-6} \text{ F}$. En $t=0$, el capacitor está cargado al máximo, de modo que $q_{\text{max}} = 1.2 \times 10^{-4} \text{ C}$.

a) ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones en el circuito?

La frecuencia angular está dada por

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(5 \times 10^{-2} \text{ H})(5 \times 10^{-6} \text{ F})}} = 2 \times 10^3 \text{ rad / s}$$

b) ¿Cuál es la energía de este circuito?

La energía total del circuito es $E_T = q_{\text{max}}^2 / 2C$ (problema propuesto 1). Sustituyendo los valores tenemos $E_T = (1.2 \times 10^{-4} \text{ C})^2 / 2 \times (5.0 \times 10^{-6} \text{ F}) = 1.44 \times 10^{-3} \text{ J}$.

c) ¿Cuál es la corriente máxima del circuito?

La corriente es máxima en el circuito cuando toda la energía está almacenada en el inductor, es decir:

$$E_T = \frac{q_{\text{max}}^2}{2C} = \frac{1}{2} L I_{\text{max}}^2$$

De aquí se obtiene que

$$I_{\text{max}} = \frac{q_{\text{max}}}{\sqrt{LC}} = \omega q_{\text{max}} = (2 \times 10^3 \text{ rad/s})(1.2 \times 10^{-4} \text{ C}) = 0.24 \text{ A}$$

d) Encontrar las funciones $Q(t)$ e $I(t)$ para el circuito.

La función $Q(t)$ está dada por

$$Q(t) = q_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$

Para $t=0$, $Q(0) = q_{\max} \cos(\phi) = q_{\max}$, de aquí se obtiene que $\phi=0$. Por lo tanto, la ecuación para $Q(t)$ es:

$$Q(t) = (1.2 \times 10^{-4} \text{ C}) \cos(2 \times 10^3 t)$$

Para $I(t)$ se tiene:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\omega q_{\max} \sin(\omega t + \phi) = -I_{\max} \sin(\omega t) = (-0.24 \text{ A}) \sin(2 \times 10^3 t)$$

Problemas propuestos.

1. La energía total del circuito LC está dada por la expresión

$$E_T = E_c + E_L = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} L \left[\frac{dQ}{dt} \right]^2$$

donde E_C y E_L son la energía en el capacitor e inductor respectivamente. Demostrar que

$$E_T = \frac{q_{\max}^2}{2C}$$

2. En un circuito LC se tiene un inductor de 100 mH y un capacitor de 4 pF. En $t=0$, está cargado un 50% y su carga es $1.0 \times 10^{-4} \text{ C}$.

- ¿Cuál es la carga máxima que puede tener el capacitor?
- ¿Cuál es la energía del sistema?
- Encontrar las funciones $Q(t)$ y $I(t)$ para el circuito.
- ¿En qué instante, después de $t=0$, la energía es puramente magnética?
- ¿En qué instante posterior la energía es puramente eléctrica?

CIRCUITOS RLC**Ejercicios resueltos**

1. Considere un circuito RLC con un inductor de 5.0 mH, un capacitor de 6.0 μ F y una resistencia de 200 Ω .

- Definir si se trata de un sistema subamortiguado, un sistema con amortiguamiento crítico o un sistema sobreamortiguado
- Si el circuito empieza oscilar con una carga inicial en el capacitor de 4.5×10^{-3} C. Determinar la energía disipada por la resistencia hasta el momento que el sistema deje de oscilar.

Solución:

Para este circuito la frecuencia angular es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(5 \times 10^{-3} \text{ H})(6 \times 10^{-6} \text{ F})}} = 5.77 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

y

$$\gamma = \frac{R}{L} = \frac{200 \Omega}{5 \times 10^{-3} \text{ H}} = 4 \times 10^4$$

En este caso se tiene $\gamma > \omega_0$ por lo que se trata de un sistema sobreamortiguado.

La energía que puede ser disipada por la resistencia es la energía almacenada inicialmente en el capacitor.

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(4.5 \times 10^{-3} \text{ C})^2}{2 * 6 \times 10^{-6} \text{ F}} = 1.68 \text{ J}$$

2. En un circuito RLC con $R=0.75 \Omega$, $L=25 \mu$ H y $C=100$ nF al tiempo $t=0$ la carga en el capacitor es Q_{max} .

- Calcular el factor de calidad
- Determinar el número de oscilaciones que ocurren antes de que la amplitud de la carga se reduzca a $(1/e) \times Q_{max}$

Solución:

Para este sistema se tiene

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(25 \times 10^{-6} \text{ H})(1 \times 10^{-7} \text{ F})}} = 6.32 \times 10^5 \text{ rad/s}$$

y

$$\gamma = \frac{R}{L} = \frac{0.75 \Omega}{2.5 \times 10^{-5} \text{ H}} = 3 \times 10^4$$

Por lo tanto se trata de un sistema subamortiguado. El factor de calidad está dado por

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma_e} = 21$$

La ecuación que describe la carga del circuito es:

$$Q(t) = Q_{\max} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \phi)$$

Para $t=0$, $Q(t) = Q_{\max}$, se busca el tiempo para el cual $Q(t) = Q_{\max} e^{-1}$, esto ocurrirá cuando $t=2L/R$. Como se pide demostrar en los problemas propuestos para sistemas subamortiguados podemos aproximar $\omega \approx \omega_0$. Por lo tanto el periodo de las oscilaciones es

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$$

El número de oscilaciones está dado por

$$n = \frac{t}{T} = \frac{\omega_0 L}{\pi R} = \frac{Q}{\pi} = \frac{21}{\pi} \approx 7$$

Problemas Propuestos

1. Mostrar que para un circuito muy subamortiguado se puede hacer la aproximación $\omega = \omega_0$.

Tip: Considerar las expresiones de ω y Q . Recordar que para sistemas muy subamortiguados $Q \gg 1$.

2. En un circuito de corriente alterna en serie, la potencia media disipada por el resistor está dada por $\bar{P} = \frac{1}{2} I_{max}^2 R$. Mostrar que ésta se puede escribir como

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{max} I_{max} \cos \phi$$

Tip: Recuerda que $V_{max} = |Z_e| I_{max}$ y la definición del factor de potencia.

3. Considere un circuito RLC con un factor de calidad Q de 750. Si se desea que el circuito tenga una frecuencia de oscilación de 3.5×10^6 Hz y la resistencia empleada es de $2.2 \times 10^{-3} \Omega$, determinar los valores de la capacitancia y la inductancia que se deben emplear.

CIRCUITOS RESONANTES**Ejercicios resueltos.**

1. Un circuito eléctrico consta de una resistencia de $5.6\text{ k}\Omega$, un inductor de 10 mH y un capacitor de 470 pF conectados en serie y con una fuente de fem que opera a una frecuencia de 100 KHz . b) Determinar la impedancia total del circuito.

Solución

La impedancia del circuito está dada por

$$Z_e = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} = Z_e = R + iX_L - iX_C$$

Donde se han identificado la reactancia inductiva y la reactancia capacitiva, X_L y X_C respectivamente.

De aquí se obtiene que

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(100\text{kHz})(470\text{pF})} = 3.39\text{k}\Omega$$

$$X_L = 2\pi Lf = 2\pi(100\text{kHz})(10\text{mH}) = 6.28\text{k}\Omega$$

Esto significa que el sistema es más inductivo que capacitivo. La impedancia del sistema es

$$Z_e = 5.6\text{k}\Omega + i \cdot 2.89\text{k}\Omega$$

El módulo de la impedancia es

$$|Z_e| = 6.30\text{k}\Omega$$

2. Una fem de 10V de corriente alterna alimenta un circuito que consta de una resistencia de $75\text{ }\Omega$ que está conectada en serie a un inductor y un capacitor cuyas reactancias inductivas y capacitivas son $25\text{ }\Omega$ y $60\text{ }\Omega$ respectivamente. Encontrar la corriente y el voltaje en cada uno de los dispositivos.

Solución

La impedancia total del circuito está dada por:

$$Z_e = R + iX_L - iX_C = 75\Omega + i 25\Omega - i 60\Omega$$

Por lo tanto,

$$|Z_e| = 82.8\Omega$$

Como se tiene un circuito de una malla en serie, la intensidad de la corriente es la misma en todos los dispositivos y está dada por

$$I = \frac{V_0}{|Z_e|} = \frac{10V}{82.8\Omega} = 121mA$$

Para cada uno de los dispositivos se tiene

$$V_R = IR = (121mA)(75\Omega) = 9.08V$$

$$V_L = IX_L = (121mA)(25\Omega) = 3.03V$$

$$V_C = IX_C = (121mA)(60\Omega) = 7.26V$$

3. En un circuito RLC en serie está conectado a una fuente de fem alterna. Los valores de los componentes son $R=5.2\Omega$, $L=36\text{ mH}$ y $C=0.41\mu\text{F}$. La amplitud de la fuente es 100 V.

- ¿Cuál es la frecuencia de resonancia del sistema?
- A la frecuencia de resonancia, ¿cuál es la amplitud del voltaje que pasa por el inductor?
- La frecuencia se cambia a $4.7 \times 10^5\text{ rad/s}$, ¿cuál es la amplitud del voltaje en el inductor?

Solución

- a) La frecuencia de resonancia es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(36\text{mH})(0.41\mu\text{F})}} = 8.2 \times 10^3\text{ rad/s}$$

- b) A la frecuencia de resonancia $I_{\max} = V_0/R$ (Problema 4) por lo tanto

$$I_{\max} = \frac{(100V)}{5.2\Omega} = 19.2A$$

Por lo tanto la amplitud del voltaje en el inductor es

$$V_L = IX_L = I\omega L = (19.2A) \left(\frac{8.2 \times 10^3\text{ rad}}{s} \right) (0.036H) = 5.7 \times 10^3V$$

- c) Cuando la frecuencia es diferente a la frecuencia de resonancia la corriente está dada por

$$I_{\max} = \frac{V_0}{|Z_e|}$$

Para este circuito

$$Z_e = R + iX_L - iX_C = R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C} = 5.2\Omega + i16920\Omega - i5.19\Omega$$

De aquí se obtiene que

$$Z_e \approx 16920\Omega$$

Por lo tanto la corriente en el circuito es

$$I_{\max} = \frac{(100V)}{16920\Omega} = 5.9mA$$

La amplitud del voltaje en el inductor a esta frecuencia es

$$V_L = IX_L = I\omega L = (0.0059A) \left(\frac{4.7 \times 10^5 \text{ rad}}{s} \right) (0.036H) = 100V$$

Problemas propuestos.

1. Un circuito RLC en serie con $R=3.0\ \Omega$, $C=20\ \text{pF}$ y una frecuencia de resonancia de 17 MHz está conectado a una fuente con $V_0=12V$. ¿Cuál es la amplitud del voltaje que pasa por el inductor y la resistencia a esa frecuencia?
2. Un circuito RLC en serie opera a su frecuencia de resonancia. A esta frecuencia la reactancia del capacitor es $200\ \Omega$ y el voltaje a través de este es $600\ V$. El circuito tiene una resistencia $R=300\Omega$. ¿Cuál es la amplitud de la fuente de voltaje en el circuito?
3. Considere un circuito en serie formado por una resistencia de $200\ \Omega$, un inductor de $0.40\ H$, un capacitor de $5.0\ \mu F$ y una fuente de voltaje con una amplitud de $3.00\ V$.
 - a. ¿Cuál es la frecuencia a la que debe operar la fuente para que la corriente en el circuito sea máxima?
 - b. ¿Cuál es la amplitud máxima de la corriente si la fuente opera a una frecuencia de $400\ \text{rad/s}$?
4. Muestre que en un circuito RLC , el factor de fase puede expresarse de la siguiente forma:

$$\tan \delta = \frac{\omega R C}{1 - \omega^2 L C}$$

5. Encuentre una expresión para la amplitud de la corriente que pasa a través de un circuito RLC forzado, en términos de V_0 , L , C y R .

Respuesta

$$I_0 \omega = \frac{V_0}{\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2 \right]^{1/2}} = \frac{V_0}{|Z_e|} \quad \text{. (Ec. 6)}$$

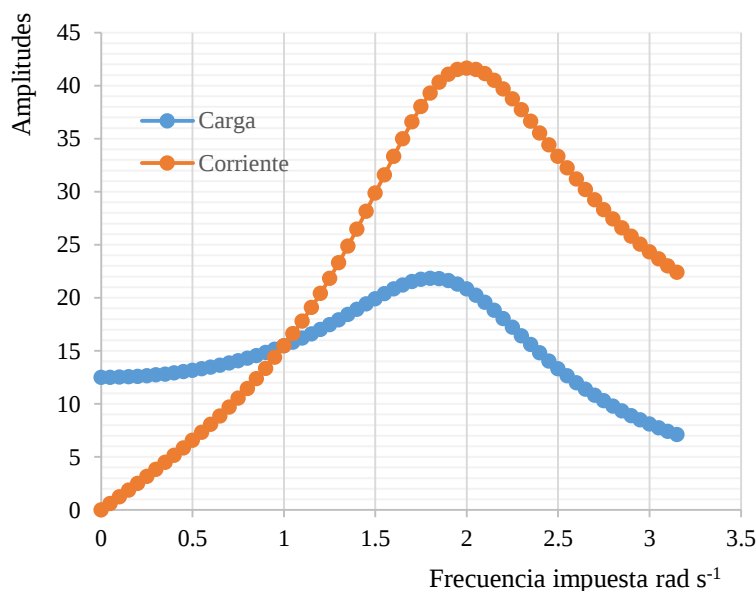
6. Un circuito RLC forzado muestra la siguiente ecuación de movimiento,

$$0.5 = \frac{d^2 q}{dt^2} + 0.6 \frac{dq}{dt} + 2q = 25 \cos(\omega t)$$

Realice un gráfico de $q_0(\omega)$ vs ω y un gráfico de $I_0(\omega)$ vs ω . Discuta las diferencias más importantes que usted detecte entre estos dos perfiles.

TIP: tome incrementos de 0.25 para omega (ω).

Respuesta.



7. Muestre que la amplitud de corriente máxima en un circuito RLC forzado está dada por:

$$I_{\max} = \frac{V_0}{R}$$

Hint. Recuerde que la amplitud máxima en la corriente eléctrica se observa en la condición de resonancia ($\omega = \omega_0$). Puede partir de la Ec. 6 e introducir la definición de $\omega_0^2 = \frac{1}{L C}$ en el denominador:

$$I_0 \omega = \frac{V_0}{\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega L C} \right)^2 + R^2 \right]^{1/2}} = \frac{V_0}{\left[\left(\omega L - \frac{L \omega_0^2}{\omega} \right)^2 + R^2 \right]^{1/2}}$$

o introducir la Ec. 2 en la Ec. 4 del documento original y continuar con las simplificaciones.