Ondas electromagnéticas.

(Además de este escrito, se recomienda revisar el siguiente material digital: https://youtu.be/YijfA07slss)

En clases anteriores hemos discutido que una onda es una perturbación en un medio de propagación, la cual puede transportar energía. Nos podemos entonces plantear las siguientes preguntas ¿Qué tipo de perturbación es una onda electromagnética? ¿Cuál es su medio de propagación?

Origen y composición de las ondas electromagnéticas

La perturbación que da origen a una onda electromagnética la constituye una carga en aceleración. Un electrón que sufre una transición entre niveles electrónicos emite una onda electromagnética debido a este cambio. El medio de perturbación es por lo general el vacío (aunque puede transportarse en algún otro dieléctrico). Por tanto, cuando una carga eléctrica acelera, está genera un patrón de perturbación que se propaga en el vacío. Este patrón de perturbación (onda electromagnética) transporta energía denominada energía electromagnética.

En esta instancia es pertinente recordar que la presencia de una carga eléctrica siempre genera un campo eléctrico (representado por sus líneas de campo) mientras que si está carga se mueve, está también generará un campo magnético (transversal a la dirección en la que se desplaza la carga). Es por tanto plausible suponer que las ondas electromagnéticas tienen un componente correspondiente a un campo eléctrico y otro correspondiente a un campo magnético (recuerden que la perturbación proviene de una carga que acelera). En la Figura 1 muestro un dibujo que representa el patrón de una onda electromagnética.

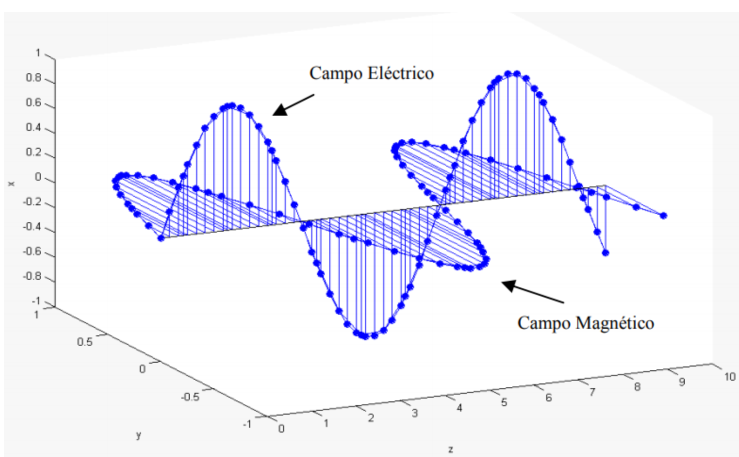

Figura 1. Representación de una onda electromagnética.

Podemos notar que la onda electromagnética no sólo contiene la contribución eléctrica y magnética, sino que además, estás contribuciones son perpendiculares entre sí. Centremos nuestra atención en la onda de campo eléctrico. Podemos ver que esta se propaga en dirección del eje *z*, mientras que su amplitud (crestas y valles) se define en el eje *x*. Notablemente, el campo magnético también se propaga en la dirección del eje *z*, pero su amplitud (crestas y valles) está definida en el eje *y*. Por tanto podemos decir que en conjunto, una onda electromagnética se propaga en una única dirección (*z* en este caso), mientras que sus componentes eléctricas y magnéticas están definidas en planos perpendiculares entre sí (plano *x* para el campo eléctrico y plano *y* en para el campo magnético, en la Figura 1)

Descripción de las ondas electromagnéticas

La forma adecuada para estudiar el fenómeno electromagnético en general es mediante las 4 ecuaciones de Maxwell. En su curso de Física II abordaron cada una de ellas (tal vez no se las presentaron como ecuaciones de Maxwell, pero ciertamente las vieron). Las cuatro ecuaciones del Maxwell son las siguientes,

a) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ Ley de Gauss del campo eléctrico

b) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Ley de Gauss del campo magnético

c) $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ Ley de Faraday

d) $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ Ley de Ampere

Las funciones de onda que describen a las perturbaciones electromagnéticas pueden encontrarse partiendo de las dos últimas ecuaciones de Maxwell. En primera instancia, recordemos que una carga en movimiento continuo genera un campo magnético **B** constante. Si la carga acelera, esta generará un campo magnético **B** que ahora cambia con el tiempo (ya no es constante). Este campo magnético variable generará una diferencia de potencial (inducida) cuyo campo eléctrico es **E**. En otras palabras, si un circuito cerrado es expuesto a una región en donde el campo magnético es variable, las cargas en el circuito se desplazarán debido a que este campo magnético variable genera una diferencia de potencial ΔV con campo eléctrico **E** (recuerden que $\Delta V = -\int \mathbf{E} ds$). El enunciado anterior es consistente con la Ley de Faraday (Ecuación inciso c),

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(Ec. 1)}$$

La magnitud del campo eléctrico generado por el campo magnético variable dependerá del medio en donde se encuentre inmerso el circuito. Recordemos que la intensidad de un campo magnético depende de la permeabilidad magnética del medio (μ). Si el medio tiene una alta permeabilidad entonces **B** será grande, si el medio tiene una baja permeabilidad, **B** será menor. Es conceptualmente más adecuado definir a la inducción magnética **H** como el vector intrínseco del campo magnético, el cual no depende del medio. El producto de la permeabilidad magnética del medio por la inducción magnética proporciona la magnitud neta del campo eléctrico en todo el espacio, es decir,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{Ec. } \mathbf{1.1})$$

En este contexto **H** indica la intensidad intrínseca del campo generado, mientras μ indica cómo afecta el medio a dicho campo. Evidentemente, si un medio tiene un valor alto de permeabilidad, en este se experimentará un campo magnético más intenso y si este campo magnético es variable (cambian con el tiempo), generará entonces, un campo eléctrico también intenso (de acuerdo con la Ley de Faraday). Particularmente, la permeabilidad del vacío es igual a $4\pi \text{ x } 10^{-7} \ \frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}}$.

La Ley de Ampere nos dice que un conductor que transporta una corriente eléctrica, cuya densidad de corriente es **J**, genera un campo magnético intrínseco **H**. Hay un término adicional en la Ley de Ampere (Ecuación d) que rara vez se aborda en los cursos de Física II, la derivada de **E** con respecto a *t*. Este término nos indica que si en una región del espacio hay un campo eléctrico variable **E** (que cambian con el tiempo), este a su vez generará un campo intrínseco **H**. Reflexionen que este término es muy importante en la descripción de ondas electromagnéticas, ya que como estás se propagan en el vacío (su medio de propagación es el vacío y no un conductor cuya densidad de corriente es **J**), este es el único término que permanece si no hay conductores transportando corrientes eléctricas. Con esta consideración (conductores que no transportan corriente y que no pueden actuar como medio de propagación de la onda electromagnética), la Ley de Ampere se simplifica a,

$$\nabla \text{ x } \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{Ec. } \mathbf{2})$$

en donde el término correspondiente a la densidad de corriente **J** se encuentra ausente.

Para empezar con nuestro tratamiento necesitamos definir una operación matemática, el rotacional (∇ x , presente en las ecuaciones c y d). El rotacional de un vector $\mathbf{F}$ definido en las 3 coordenadas espaciales se obtiene mediante el siguiente determinante,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \text{ (Ec. } \mathbf{3}\text{)}$$

Con estas operaciones podemos obtener el rotacional tanto del campo eléctrico (Ley de Faraday, Ec. 1), como del campo magnético (Ley de Ampere, Ec. 2). Aplicando la ecuación 3 a la ecuación 1 tenemos que,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y\right) = -\frac{\partial}{\partial t}B_x \qquad \text{componente en } x\ (\hat{x}) \ . \quad . \quad . \text{ (Ec. } \mathbf{4}\text{)}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z\right) = -\frac{\partial}{\partial t}B_y \qquad \text{componente en } y\ (\hat{y}) . \quad . \quad . \text{ (Ec. } \mathbf{5}\text{)}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x\right) = -\frac{\partial}{\partial t}B_z \qquad \text{componente en } z\ (\hat{z}) . \quad . \quad . \text{ (Ec. } \mathbf{6}\text{)}$$

Aplicando ahora la ecuación 3 a la ecuación 2 obtenemos,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}H_z - \frac{\partial}{\partial z}H_y\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}E_x \qquad \text{componente en } x\ (\hat{x}) \ . \quad . \text{ (Ec. } \mathbf{7}\text{)}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}H_x - \frac{\partial}{\partial x}H_z\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}E_y \qquad \text{componente en } y\ (\hat{y}) . \quad . \text{ (Ec. } \mathbf{8}\text{)}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}H_y - \frac{\partial}{\partial y}H_x\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}E_z \qquad \text{componente en } z\ (\hat{z}) . \quad . \text{ (Ec. } \mathbf{9}\text{)}$$

Como ambas ondas se propagan únicamente en la dirección *z* (ver Figura 1), todas las derivadas respecto a *x* y *y*, son cero, esto es,

$$-\frac{\partial}{\partial t}B_x = -\frac{\partial}{\partial z}E_y \qquad \text{(proveniente de la ecuación 4)}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}B_y = \frac{\partial}{\partial z}E_x \qquad \text{(proveniente de la ecuación 5)}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}B_z = 0 \qquad \text{(proveniente de la ecuación 6)}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x = -\frac{\partial}{\partial z} H_y$$ (proveniente de la ecuación 7)

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y = \frac{\partial}{\partial z} H_x$$ (proveniente de la ecuación 8)

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_z = 0$$ (proveniente de la ecuación 9)

Por tanto nos quedan los siguientes cuatro términos,

$$-\frac{\partial}{\partial t} B_x = -\frac{\partial}{\partial z} E_y \quad \text{. . . . . (Ec. } \mathbf{10}\text{)}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} B_y = \frac{\partial}{\partial z} E_x \quad \text{. . . . . (Ec. } \mathbf{11}\text{)}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x = -\frac{\partial}{\partial z} H_y \quad \text{. . . . . (Ec. } \mathbf{12}\text{)}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y = -\frac{\partial}{\partial z} H_x \quad \text{. . . . . (Ec. } \mathbf{13}\text{)}$$

Para encontrar la(s) función(es) matemática(s) que describe(n) a las ondas electromagnéticas, intentaremos mostrar que a partir d las cuatro expresiones de arriba, es posible obtener la ecuación general de onda. Para este fin, derivaremos a la ecuación 11 respecto al tiempo, por ambos lados,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} B_y = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z} E_x \quad \text{. . . . . (Ec. } \mathbf{14}\text{)}$$

utilizando la identidad,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f$$

(conocida como relación de Maxwell y muy utilizada en termodinámica), podemos reacomodar el lado derecho de la ecuación 14 como sigue,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} B_y = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z} E_x$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} B_y = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t} E_x \quad \text{. . . . . (Ec. } \mathbf{15}\text{)}$$

La derivada de E_x respecto al tiempo está también presente en la ecuación 12. Despejándola e insertándola en la ecuación 15 tenemos,

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_y = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}E_x \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_y = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}H_y\right)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}$$

Utilizando la relación entre el vector de magntización **H** y el campo magnético **B** (Ecuación 1.1), tenemos

$$\mu\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon_0}\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \qquad \text{(Ec. 16)}$$

Notablemente, la ecuación 16 exhibe una estructura matemáticamente idéntica a la ecuación general de onda,

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = \upsilon^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{(Ec. 17)}$$

Sólo que la derivada de la derecha en la ecuación 16 se realiza respecto a *z* y no respecto a *x* ya que, como hemos mencionado, hemos considerado que las ondas electromagnéticas se propagan en la dirección *z* (Figura 1). Sabemos que la solución de la ecuación diferencial en 16 proporciona funciones sinusoidales, ya que son las típicas funciones proporcionadas por la ecuación general de onda,

$$\psi(x,t) = \mathrm{A}\sin(kx-\omega t)$$

Por tanto, la contribución magnética de una onda electromagnética queda descrita por la siguiente expresión,

$$H_y(z,t) = H_0\sin(kz-\omega t) \qquad \text{(Ec. 18)}$$

La ecuación 18 describe la componente magnética de una onda electromagnética que se propaga en la dirección *z* (positiva). Noten que la amplitud de la onda (H_0) está definida en el eje *y* (ya que estamos describiendo el componte H_y de campo de intrínseco), tal y como lo indica la Figura 1. La frecuencia angular ω y el número de onda *k* conservan las mismas expresiones que las vistas en la clase de ondas viajeras.

Mediante un procedimiento similar (derivando a la ecuación 12 respecto a *t* e insertando la ecuación 11), se llega al siguiente resultado para la contribución eléctrica,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon_0}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{Ec. } \mathbf{19})$$

Cuya solución es,

$$E_x(z,t) = E_0 \sin(kz - \omega t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{Ec. } \mathbf{20})$$

La ecuación 20 describe la componente eléctrica de una onda electromagnética que se propaga en la dirección *z* (positiva). Noten que la amplitud de la onda (E_0) se encuentra definida en el eje *x*, tal y como lo indica la Figura 1.

Ejercicio propuesto 1

Obtenga la ecuación 19

Velocidad de propagación de una onda electromagnética.

Sabemos que en general, la velocidad de una onda que se propaga en un medio está dada por,

$$\upsilon = \nu\lambda$$

En el vacío, las ondas electromagnéticas viajan a la velocidad de la luz y por tanto,

$$c = \nu\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{Ec. } \mathbf{21})$$

Comparando las ecuaciones 16 y 17 podemos notar que la velocidad a la que se propaga una onda electromagnética es,

$$\upsilon^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{Ec. } \mathbf{22})$$

siendo μ_0 y ε_0 la permeabilidad y la permitividad del vacío. Como las ondas electromagnéticas se desplazan a la velocidad de la luz,

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{Ec. } \mathbf{23})$$

Las tres cantidades involucradas en la ecuación 23 son constantes fundamentales de la física. Igualando las ecuaciones 21 y 23 tenemos,

$$v\lambda = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Por tanto, en el vacío, la frecuencia de oscilación determina directamente a la longitud de onda y viceversa.

Ejercicio Propuesto 2

Utilice la ecuación 23 para verificar el valor de la velocidad de la luz

----

Relación entre las amplitudes de las componentes eléctricas y magnéticas.

A continuación, mostraremos que las amplitudes de la onda eléctrica y de la onda magnética están relacionadas por una simple constante, por lo que si conocemos una (amplitud) podremos conocer la otra. Para este fin, retomemos la ecuación 11,

$$-\frac{\partial}{\partial t} B_y = \frac{\partial}{\partial z} E_x$$

Como $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y = \frac{\partial}{\partial z} E_x . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{Ec. } \mathbf{24})$$

Puesto que ya conocemos las expresiones de H_y (ecuación18) y de E_x (ecuación 20), podemos obtener las derivadas parciales de la ecuación anterior

$$\frac{\partial}{\partial t} H_y = \frac{\partial}{\partial t} H_0 \sin(kz - \omega t) = -H_0 \omega \cos(kz - \omega t) . \quad . \quad . \quad (\text{Ec. } \mathbf{25})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x = \frac{\partial}{\partial z} E_0 \sin(kz - \omega t) = E_0 k \cos(kz - \omega t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{Ec. } \mathbf{26})$$

Insertando las ecuaciones 25 y 26 en la ecuación 24

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y = \frac{\partial}{\partial z} E_x$$

$$-\mu\left(-H_0 \omega \cos\left(kz - \omega t\right)\right) = E_0 k \cos\left(kz - \omega t\right)$$

$$\mu H_0 \omega = E_0 k$$

$$\mu H_0 \frac{\omega}{k} = E_0 .$$

Recordando que la velocidad de una onda viajera puede escribirse como $\upsilon = \omega/k$ y que $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

$$\upsilon B_0 = E_0$$

En el vacío $\upsilon = c$ y por tanto el modulo del campo eléctrico es igual al módulo del campo magnético multiplicado por la velocidad de la luz,

$$E_0 = cB_0 . \qquad \text{(Ec. \textbf{27})}$$

Ejercicio Propuesto 3

Una onda plana se propaga en el vacío de modo tal que la amplitud del campo eléctrico es de 240V/m y oscila en la dirección *z*. Además, sabemos que la onda EM se propaga en la dirección +*x* y que ω =2.0 π x10^{12} rad/s. Con estos datos, calcular: a) la frecuencia de oscilación f, b) el periodo, c) la longitud de onda, d) la magnitud (amplitud) del campo magnético.

Respuestas: a) $1.0\times10^{12}\,\mathrm{Hz}$, b) $1.0\times10^{-12}\,\mathrm{s}$, c) $3.0\times10^{-4}\,\mathrm{m}$, d) $8.0\times10^{-7}\,\mathrm{m}$
