Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Química

Documentos de apoyo a la docencia

Determinación de la aceleración de la gravedad y su incertidumbre empleando un plano inclinado.

Autores: Alfaro Fuentes Ricardo y Cosio Castañeda Carlos

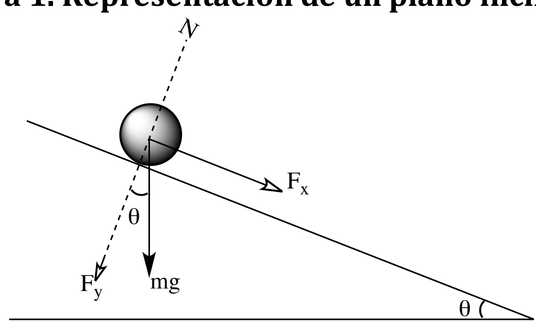
La aceleración de la gravedad puede ser medida mediante distintos experimentos como tiro parabólico, tiro vertical, plano inclinado o como se realiza en el Laboratorio de Física con péndulo simple. En este caso, si planteamos obtener el valor de la aceleración de la gravedad, g, empleando un plano inclinado, Figura 1, primero debemos asumir que el sistema no presenta fricción entre el bloque en movimiento y la superficie.

De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre que se deriva del análisis de las fuerzas que actúan sobre el bloque, observaremos que la fuerza que ocasiona el desplazamiento es el resultado de la contribución del peso por efecto del ángulo de inclinación del plano (θ), Ecuación 1.

Dado que este fenómeno comprende a un movimiento uniformemente acelerado, es posible describir al desplazamiento, Δr, como función del tiempo, t, Ecuación 2, cuando este inicia del reposo.

Si igualamos las ecuaciones resultantes del análisis dinámico (diagrama de cuerpo libre) y del análisis cinemático (desplazamiento como función del tiempo) se tendrá una expresión que relaciona tanto al tiempo como al desplazamiento con el ángulo de inclinación, θ, Ecuación3.

Figura 1. Representación de un plano inclinado



$$\sum F_x = ma = mgsen\theta \qquad \text{Ecuación 1.}$$

$$\Delta r = \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{Ecuación 2.}$$

$$\Delta r = \frac{1}{2}gsen\theta t^2 \qquad \text{Ecuación 3.}$$

Los datos obtenidos de este experimento se realizaron empleando un balín de acero, midiendo el desplazamiento y el tiempo del recorrido a un ángulo de 5°, Tabla 1. El desplazamiento se midió con un flexómetro cuya resolución es 0.1cm y el tiempo con una fotocompuerta cuya resolución es 0.0001s.

Tabla 1. Medidas de desplazamiento y tiempo para determinar el valor de g.

Medida número	Desplazamiento (m)	Tiempo (s) a	b	c	d
1	0.100	0.4034	0.3868	0.3799	0.3787
2	0.200	0.5830	0.5700	0.5749	0.5693
3	0.300	0.7613	0.7581	0.7752	0.7393
4	0.400	0.8873	0.8826	0.8862	0.8874
5	0.500	0.9890	0.9926	0.9923	1.0008
6	0.600	1.1039	1.1370	1.1682	1.1103
7	0.700	1.2073	1.2049	1.2022	1.2166
8	0.800	1.3812	1.3267	1.3046	1.3136
9	0.900	1.3843	1.3730	1.3871	1.3813
10	1.000	1.4952	1.5061	1.5262	1.5077
11	1.100	1.5941	1.6242	1.7062	1.5696
12	1.200	1.6557	1.6600	1.6649	1.6564

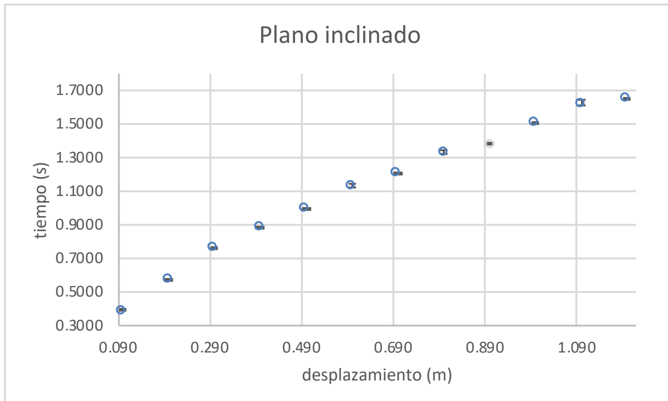
Dado que el tiempo de recorrido se midió cuatro veces para el mismo valor de desplazamiento, es requerido obtener la media aritmética, la desviación estándar (s), la incertidumbre tipo A, tipo B y combinada, Tabla 2. En el caso de la incertidumbre tipo B asociada al tiempo, dado que no se cuenta con un certificado de calidad ni manual que especifique dicho valor, se usará la resolución del instrumento.

Tabla 2. Valores de media aritmética, desviación estándar e incertidumbres.

$$u_A = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Medida número	Media aritmética tiempo (s)	Desviación estándar (s)	u_A (s)	u_C (s)
1	0.3872	0.0114	0.0057	0.0057
2	0.5743	0.0063	0.0032	0.0032
3	0.7585	0.0148	0.0074	0.0074
4	0.8859	0.0022	0.0011	0.0011
5	0.9937	0.0050	0.0025	0.0025
6	1.1299	0.0293	0.0147	0.0147
7	1.2078	0.0063	0.0031	0.0031
8	1.3315	0.0343	0.0172	0.0172
9	1.3814	0.0061	0.0030	0.0030
10	1.5088	0.0129	0.0064	0.0064
11	1.6235	0.0595	0.0297	0.0297
12	1.6593	0.0042	0.0021	0.0021

Una vez obtenidos los valores de la incertidumbre asociada con cada valor de medida, es necesario realizar una gráfica[1] de los datos colectados para constatar que el sistema no es lineal. Las barras de error (u_C) son muy pequeñas y para visualizarlas fue necesario quitar el relleno de los puntos en la gráfica 1.



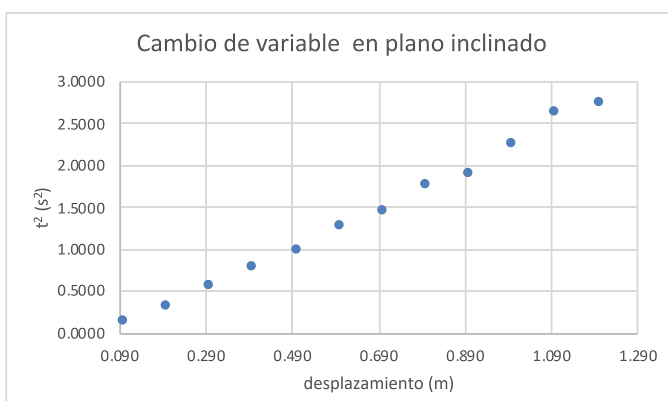
Gráfica 1. Tiempo como función del desplazamiento para un objeto situado en un plano inclinado.

Para poder evaluar la correlación entre las variables medidas es necesario emplear el método de los cuadrados mínimos y para ello se requiere linealizar la tendencia entre los datos experimentales. El mecanismo para observar una tendencia lineal es mediante un cambio de variable y para ello nos apoyaremos en la Ecuación 3, en donde se observa que el cambio de variable más factible es elevar al cuadrado el tiempo.

En la Gráfica 2 se puede observar como los datos muestran una tendencia lineal en comparación con aquellos de la Gráfica 1. Es importante aclarar que para este documento de apoyo se seguirá respetando la asignación de las variables experimentales (dependiente e independiente) por lo que la ecuación 3 se reordenó dejando el tiempo al cuadrado como variable dependiente (eje de las ordenadas), Ecuación 4. Los datos obtenidos de elevar al cuadrado el tiempo se pueden ver en la Tabla 3.

$$t^2 = \frac{2}{gsen\theta}\Delta r$$

Ecuación 4.



Gráfica 2. Cambio de variable en plano inclinado.

[1]Es importante notar que se dio formato a la gráfica, se ajustaron los ejes, se colocó títulos en gráfica y ejes, sin olvidar las unidades

Una vez observada la tendencia lineal es posible emplear el método de los cuadrados mínimos para determinar los valores de la pendiente (m) y la ordenada al origen (b). Para obtener esta información es necesario emplear las relaciones matemáticas propias del método, Ecuaciones 5 y 6.

$$m = \frac{N\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{N\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \qquad \text{Ecuación 5.}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{N\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \qquad \text{Ecuación 6.}$$

Las operaciones a realizar en el método de los cuadrados mínimos son muy sencillas y para poder explicar cómo se realizan usaremos de ejemplo $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ en donde para cada par de datos primero multiplicaremos el valor de *x* y *y*, para luego sumar cada uno de los productos que son N= 12. De esta forma se deben de realizar los cálculos para obtener cada una de las operaciones que se indican y, posteriormente, determinar m y b. En la Tabla 3, se observa el resultado de los cálculos realizados.

Tabla 3. Cambio de variable y cálculos para cuadrados mínimos.

Medida número	Desplazamiento (m)	t^2 (s^2)	$x_i y_i$	x^2
1	0.100	0.150	0.015	0.010
2	0.200	0.330	0.066	0.040
3	0.300	0.575	0.173	0.090
4	0.400	0.785	0.314	0.160
5	0.500	0.987	0.494	0.250
6	0.600	1.277	0.766	0.360
7	0.700	1.459	1.021	0.490
8	0.800	1.773	1.418	0.640
9	0.900	1.908	1.718	0.810
10	1.000	2.276	2.276	1.000
11	1.100	2.636	2.899	1.210
12	1.200	2.753	3.304	1.440
Sumas	7.800	16.909	14.464	6.500

La información completa de las operaciones realizadas para completar el cálculo empleando el método de cuadrado mínimos se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. Cálculos requeridos en el método de cuadrados mínimos

	$N=$ 12		
$N\sum_{i=1}^{n} x_i y_i=$	12 x 14.464 = 173.568	$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i=$	7.800 x 16.909 = 131.890
$N\sum_{i=1}^{n} x_i^2=$	12 x 6.500 = 78.00	$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2=$	7.800^2 = 60.84
$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i=$	7.800 x 14.464 = 112.82	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i=$	6.500 x 16.909 = 109.90

Por último, para obtener tanto m como b se sustituyen los valores en las Ecuaciones 5 y 6.

$$m = \frac{173.568 - 131.890}{78.00 - 60.84} = 2.42878\ \mathrm{s^2/m}$$

$$b = \frac{109.90 - 112.82}{78.00 - 60.84} = -0.1701\ \mathrm{s^2}$$

Hasta el momento se han trabajado las operaciones sin tener cuidado en los criterios de cifras significativas y redondeo, esto con el objetivo de perder lo menos posible la información; sin embargo, como ahora se va a presentar la ecuación de la recta se debe tomar en cuenta dichos criterios. Los valores colectados en el experimento indican que el resultado se debe de expresar con tres cifras significativas, por lo que al aplicar las reglas de redondeo, se obtiene la siguiente ecuación de la recta, Ecuación 7.

$$t^2 = 2.43\Delta r - 0.170 \qquad \text{Ecuación 7.}$$

Para el cálculo de la incertidumbre de la pendiente (S_m) y la incertidumbre de la ordenada al origen (S_b) se requieren de las Ecuaciones 8, 9 y 10. Al observar las ecuaciones recién mencionadas, se plantea que para obtener los valores requeridos sólo falta una suma. Las operaciones realizadas para esta suma se pueden apreciar en la Tabla 5. Recuerde que para todo cálculo es requerido usar el mayor número de dígitos para no perder información.

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2}{N-2}}$$

Ecuación 8.

$$S_m = S_y\sqrt{\frac{N}{N\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}}$$

Ecuación 9.

$$S_b = S_y\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{N\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}}$$

Ecuación 10.

Tabla 5.

Medida número	y_i - mx_i - b	(y_i - mx_i - b)^2
1	0.0765	0.0059
2	0.0135	0.0002
3	0.0162	0.0003
4	-0.0172	0.0003
5	-0.0574	0.0033
6	-0.0111	0.0001
7	-0.0719	0.0052
8	-0.0004	0.0000
9	-0.1079	0.0116
10	0.0174	0.0003
11	0.1339	0.0179
12	0.0084	0.0001
	Suma	0.0451

$$S_y = \sqrt{\frac{0.0451}{12-2}} = 0.0671 s^2 \qquad S_m = 0.0671 * \sqrt{\frac{12}{78.00 - 60.84}} = 0.0561\ {s^2}/{m}$$

$$S_b = 0.0671 * \sqrt{\frac{6.500}{78.00 - 60.84}} = 0.0413 s^2$$

Es entonces que el valor de la pendiente y la ordenada al origen con sus correspondientes incertidumbres y respetando el número de cifras significativas son:

$$m = (2.43 \pm 0.06)\ s^2/m$$
$$b = (-0.170 \pm 0.041)\ s^2$$

En este punto del documento ya solo nos falta determinar el valor de g y su incertidumbre. Para la obtención del valor de g, vemos la correlación de la pendiente, m, con los términos de la Ecuación 4, y con ello generar la Ecuación 11 que nos muestra como el calcular el valor de g.

$$m = \frac{2}{g_{sen\theta}} \qquad \text{Ecuación 11}$$

$$g = \frac{2}{msen\theta} = \frac{2}{2.42878sen(5)} = 9.44935\ m/s^2$$

Para el cálculo de la incertidumbre de la aceleración de la gravedad se requiere de la ley de propagación de la incertidumbre, Ecuación 12. La función (*f*) en la ley de propagación de la incertidumbre corresponde al cálculo de g por lo que en la Ecuación 13 se tiene la expresión con la cual calcular $u_C(g)$.

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (u_C[x_i])^2} \qquad \text{Ecuación 12}$$

$$u_C(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{2}{msen\theta}}{\partial m}\right)^2 (u_C[m])^2} \qquad \text{Ecuación 13}$$

$$u_C(g) = \sqrt{\left(-\frac{2}{m^2sen\theta}\right)^2 (S_m)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{(2.42878)^2sen(5)}\right)^2 (0.0561)^2} = 0.21857\ m/s^2$$

Finalmente, para informar el valor de la aceleración de la gravedad es importante colocar los valores de acuerdo a los criterios de cifras significativas.

$$g = (9.44 \pm 0.22)\ m/s^2.$$

El resultado obtenido para g presenta un intervalo de 9.22 a 9.66 y de acuerdo al valor convencionalmente verdadero para la Ciudad de México que es de 9.78 m/s^2, el experimento realizado no concuerda con el valor de la aceleración de la gravedad, por lo que se requerirá de evaluar cada uno de los elementos realizados para identificar la fuente del error que nos aleja del valor convencional, repetir el experimento corregido el error y obtener el valor de g en la Ciudad de México.

Bibliografía:

- Miranda Martín del Campo, J.; Evaluación de la incertidumbre en datos experimentales. Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de Física. Departamento de Física Experimental, 2000.
- Ohanian, H. C.; Markert, J. T.; Física para ingeniería y ciencias, volumen 1. Tercera edición. Editorial Mc Graw Hill, 2009
- Moreno Corral, M. A. Primeras mediciones precisas de la gravedad hechas en México, Revista Mexicana de Física 2014, 60, 24-30