GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO

FÍSICA I (Clave 1113)

Departamento de Física y Química Teórica

Facultad de Química

Universidad Nacional Autónoma de México

Noviembre 2019

UNIDAD I. ELEMENTOS BÁSICOS.

1. Expresar en horas, minutos y segundos el intervalo de tiempo de 4210 s.

$$(4210\ s)\left(\frac{1\ h}{3600\ s}\right) = 1.169\ h \approx 1.17\ h$$

$$= 1\ h + \ (0.17\ h)\left(\frac{60\ min}{1\ h}\right) = 1\ h + 10.20\ min =$$

$$= 1\ h + 10\ min + (0.20\ min)\left(\frac{60\ s}{1\ min}\right) = 1\ h + 10\ min + 12\ s$$

$$\therefore 4210\ s = 1\ h\ 10\ \ min\ 12\ s$$

2. Un terreno tiene un área de 1500 yardas², expresar esta área en m².

$$1500\ yd^2 = (1500\ yd^2)\left[\frac{(0.914\ m)^2}{(1\ yd)^2}\right] = 1253.09\ m^2$$

$$\therefore 1500\ yd^2 = 1253.09\ m^2$$

3. Determine las dimensiones de $A = 3\pi\ \frac{\alpha^2}{\beta^3}$, siendo α una aceleración, β una longitud y $\pi = 3.1416$.

Sabemos que: $[\alpha] = LT^{-2}$ y $[\beta] = L$

Sustituyendo: $[A] = \frac{(LT^{-2})^2}{(L)^3}$

$$[A] = \frac{L^2T^{-4}}{L^3} = L^2\ T^{-4}\ L^{-3} = L^{-1}T^{-4}$$

$$\therefore [A] = L^{-1}T^{-4}$$

Nota: 3 y π son constantes <u>adimensionales.</u>

4. Exprese la distancia de la Tierra al sol en pársec (*pc*) y en años luz. Exprese un año luz y un pársec en kilómetros.

$$Distancia\ de\ la\ tierra\ al\ sol = D_{TS} = 1.49 \times 10^{8}\ km$$

$$1\ \mathrm{pc} = 3.084 \times 10^{13}\ km$$

$$1\ Año\ luz = 9.46 \times 10^{12}\ km$$

Entonces:

$$D_{TS} = (1.49 \times 10^{8}\ km)\left(\frac{1\ pc}{3.084 \times 10^{13}\ km}\right) = 4.8314 \times 10^{-6}\ pc$$

$$D_{TS} = (1.49 \times 10^{8}\ km)\left(\frac{1\ Año\ luz}{9.46 \times 10^{12}\ km}\right) = 1.5751 \times 10^{-5} año\ luz$$

5. ¿Cuál es la incertidumbre porcentual en el volumen de una esfera cuyo diámetro es de 4.96 ± 0.03cm?

$$V = \frac{4}{3}\pi r^{3} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^{3} = \frac{4}{3}\pi\frac{D^{3}}{8} = \frac{4\pi}{(3)(8)}D^{3} = \frac{\pi}{6}D^{3}$$

$$\Delta V = \frac{\pi}{6}(3D^{2})\Delta D = \frac{\pi}{2}D^{2}\Delta D$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\frac{\pi}{2}D^{2}\Delta D}{\frac{\pi}{6}D^{3}} = 3\frac{\Delta D}{D} = \frac{3 \times 0.03\ cm}{4.96\ cm} = \frac{0.09}{4.96} = 0.02$$

$$\therefore \frac{\Delta V}{V} \times 100 = 2\ \%$$

6. La rapidez, V, de un cuerpo está dada por la ecuación: $V = 2At^3 + 6Bt^2 + 7Ct$, donde t representa el tiempo, ¿cuáles son las dimensiones de A, B y C?

Sabemos que $[V] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$, entonces cada sumando de la ecuación debe tener las mismas dimensiones ∴ $A\,T^3 = LT^{-1}$; B $T^2 = LT^{-1}$ y $C\,T = LT^{-1}$.

Despejando de cada ecuación se obtiene:

$[A] = \frac{LT^{-1}}{T^3} = LT^{-4};$ $[B] = \frac{LT^{-1}}{T^2} = LT^{-3};$ $[C] = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$

$$\therefore [A] = LT^{-4};\ [B] = LT^{-3};\ [C] = LT^{-2}.$$

Nota: 2, 6 y 7 son constantes <u>adimensionales.</u>

7. Las masas atómicas promedio del hidrógeno y el oxígeno son 1.00797 y 15.9984 unidades de masa atómica, respectivamente, una unidad de masa atómica (u) es igual a 1.6604 X 10^{-27} kg. Exprese en kilogramos y gramos la masa atómica de un átomo de hidrógeno y un átomo de oxígeno.

$$M_H = 1.00797\,u \times \left(\frac{1.6604 \times 10^{-27}\,kg}{1\,u}\right) = 1.6736 \times 10^{-27}\,kg =$$

$$= 1.6736 \times 10^{-27}\,kg \times \left(\frac{1 \times 10^3\,g}{1\,kg}\right) = 1.6736 \times 10^{-24}\,g$$

$$M_O = 15.9984\ u \times \left(\frac{1.6604 \times 10^{-27}\,kg}{1\,u}\right) = 2.6564 \times 10^{-26}\,kg =$$

$$= 2.6564 \times 10^{-26}\,kg \times \left(\frac{1 \times 10^3\,g}{1\,kg}\right) = 1.6736 \times 10^{-23}\,g$$

8. La densidad volumétrica de masa (ρ) del gas estelar en nuestra galaxia se estima en: 10^{-21} kg/m^3. Suponga que el gas sea principalmente hidrógeno, estime el número de átomos de hidrógeno por cada centímetro cúbico.

$$\rho = \left(\frac{10^{-21}\ kg}{m^3}\right)\left(\frac{1\ m^3}{10^6 cm^3}\right) = 1X10^{-27}\frac{kg}{cm^3}$$

La masa de un átomo de hidrógeno en kilogramo es:

$$M_H = (1.00797\ u)\left(\frac{1.6604 \times 10^{-27}\ kg}{1\ u}\right) = 1.6736 \times 10^{-27} kg$$

$$\rho = \left(\frac{10^{-27}\ kg}{cm^3}\right)\left(\frac{M_H}{1.6736 \times 10^{-27} kg}\right) = \frac{1}{1.6737}\frac{M_H}{cm^3}$$

$$\therefore \rho = 0.5972\frac{átomos\ H}{cm^3}$$

9. Un estudiante deriva la ecuación $x = vt^2 + \frac{1}{2}at$. Donde x es la magnitud del desplazamiento, v la rapidez, a la magnitud de la aceleración y t el tiempo. Usando análisis dimensional, diga si la ecuación es probablemente correcta.

Se sabe que: $[x] = L$ $\quad [t] = T$

$[v] = LT^{-1}$ $\quad [a] = LT^{-2}$

Entonces:

$$[x] = [v][t]^2 + [a][t]$$

$$L = LT^{-1}T^2 + LT^{-2}T = LT + LT^{-1}$$

$$\therefore L \neq LT + LT^{-1}\ No\ es\ correcta.$$

10. Una partícula de masa ***m*** gira en un círculo de radio **r** con celeridad **a**. Use análisis dimensional y encuentre la rapidez *v* de dicha partícula.

Se propone:

$$v \sim m^p r^q a^s \,.$$

Se introduce una constante adimensional: $[K] = 1$

$$v = K\, m^p r^q a^s \,.$$

$$[v] = LT^{-1}; [m] = M;\ [r] = L\ y\ [a] = LT^{-2} \,.$$

$$[v] = [K][m]^p[r]^q[a]^s \implies LT^{-1} = M^p L^q (LT^{-2})^s$$

Queda el sistema de ecuaciones:

$$L{:}\, 1 = q + s$$
$$T{:}\ -1 = -2s$$
$$M{:}\, 0 = p$$

Cuya solución es:

$$p = 0$$
$$s = 1/2$$
$$q = 1/2$$

Finalmente

$$v = K\, r^{1/2} a^{1/2} \therefore v = K\sqrt{ra}$$

11. Exprese en unidades fundamentales del Sistema Internacional de Unidades, la cantidad $A = \frac{200(N)^2}{(h)(mg)^2}$.

Para escribir A en unidades fundamentales del Sistema Internacional de Unidades se usa la definición: $1\,N = \frac{1\,kg \cdot m}{s^2}$, y las equivalencias: $1\,h = 3.6 \times 10^3\,s$; $1\,mg = 1 \times 10^{-6}\,kg$, para construir factores unitarios y simplificar, como se muestra a continuación:

$$A = \frac{200(N)^2}{(h)(mg)^2}\left(\frac{\frac{1\,kg \cdot m}{s^2}}{1\,N}\right)^2\left(\frac{1\,h}{3.6 \times 10^3\,s}\right)\left(\frac{1\,mg}{1 \times 10^{-6}\,kg}\right)^2$$

$$A = \frac{200(N)^2}{(h)(mg)^2}\frac{(kg)^2(m)^2}{(s^2)^2(N)^2}\frac{h}{3.6 \times 10^3\ s}\frac{(mg)^2}{1 \times 10^{-12}(kg)^2}$$

Simplificando unidades y números, se obtiene finalmente:

$$A = \frac{200}{(3.6 \times 10^{-9})}\frac{(m)^2}{(s)^5} = \frac{200}{3.6} \times 10^9\ \frac{m^2}{s^5} = 5.6 \times 10^{10}\ \frac{m^2}{s^5}$$

Entonces:

$$A = \frac{200(N)^2}{(h)(mg)^2} = 5.6 \times 10^{10}\ \frac{m^2}{s^5}$$

UNIDAD 2. ANÁLISIS VECTORIAL.

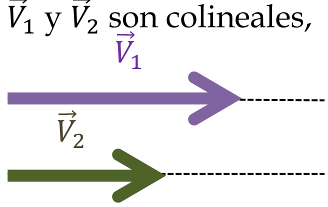
1. Dos vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ sumados dan como resultante $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$. Describa $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ si:

   a) $|\vec{V}| = |\vec{V}_1| + |\vec{V}_2|$

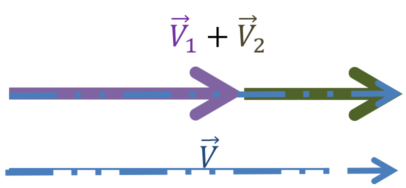
   b) $|\vec{V}|^2 = |\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2$

   c) $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$

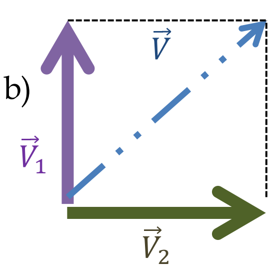
   a) $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ son colineales,



   entonces



   b)



   Por lo tanto son perpendiculares.

   c) Para que la ecuación $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$, se cumpla, entonces $\vec{V}_2 = \vec{0}$

2. Si $\vec{V} = 3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$ ¿qué escalar k debe multiplicarse por $\vec{V}$ para qué $|k\vec{V}| = 15$?

$$\vec{V} = 3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

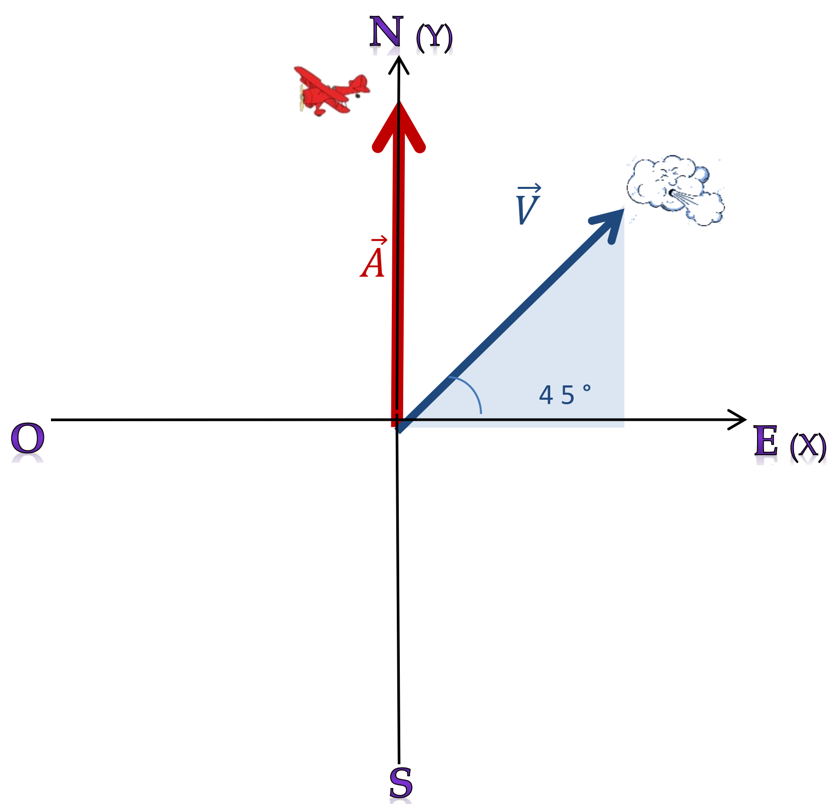
$$k\vec{V} = \vec{D}$$

$$\left|\vec{D}\right| = \left|k\vec{V}\right| = |k|\left|\vec{V}\right| = 15$$

$$5\,k = 15$$

$$k = \frac{15}{5} = 3$$

3. Un aeroplano se dirige hacia el norte con una rapidez de 450 km/h. Si sopla un viento hacia el noreste con una rapidez de 50 km/h. Calcule:
   a) La velocidad real (magnitud y dirección) del aeroplano.
   b) La distancia que se alejará de su curso original luego de 20 min.
      Considerando un plano cartesiano y haciendo coincidir el norte con el eje Y y el este con el eje X.



Se escribe: $\vec{A}$ y $\vec{V}$

$$\vec{A} = 0\,\hat{\imath} + 450\,\hat{\jmath}[km/h]$$

$$|\vec{V}| = 50\ km/h$$

$$V_x = |\vec{V}|\cos(45) = (50)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 25\sqrt{2}$$

$$\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath}\ [km/h]$$

$$V_y = |\vec{V}|sen(45) = (50)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 25\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow\ \vec{V} = 25\sqrt{2}\hat{\imath} + 25\sqrt{2}\hat{\jmath}[km/h]$$

La velocidad real del avión, $\overrightarrow{V_R}$, es la suma: $\overrightarrow{V_R} = \vec{A} + \vec{V}$

$$\overrightarrow{V_R} = \vec{V} + \vec{A} = (0\,\hat{\imath} + 450\,\hat{\jmath}) + \left(25\sqrt{2}\hat{\imath} + 25\sqrt{2}\hat{\jmath}\right) = 25\sqrt{2}\hat{\imath} + 485.36\hat{\jmath}[km/h]$$

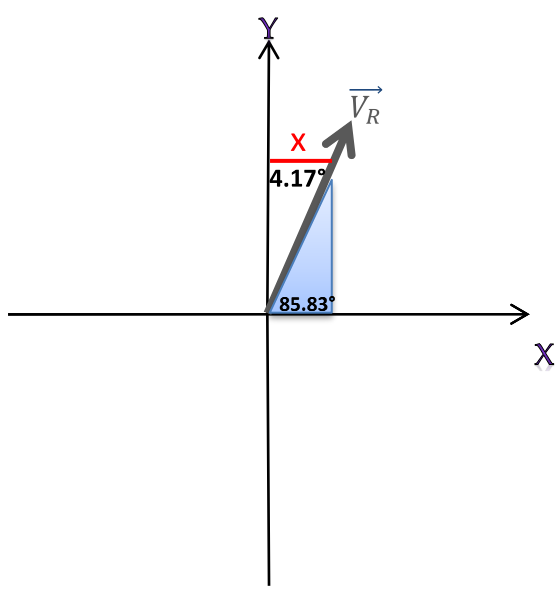
Para la magnitud de la velocidad real del avión:

$$|\overrightarrow{V_R}| = \sqrt{\left(25\sqrt{2}\right)^2 + (485.36)^2} = 486.64\ [km/h]$$

Para la dirección de la velocidad real del avión:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{485.36}{25\sqrt{2}}\right) = 85.83°$$

Que corresponde a: 486.64 km/h y 4.17° al este del norte.



Para la distancia recorrida, D, en la dirección real de movimiento en los primeros 20 min:

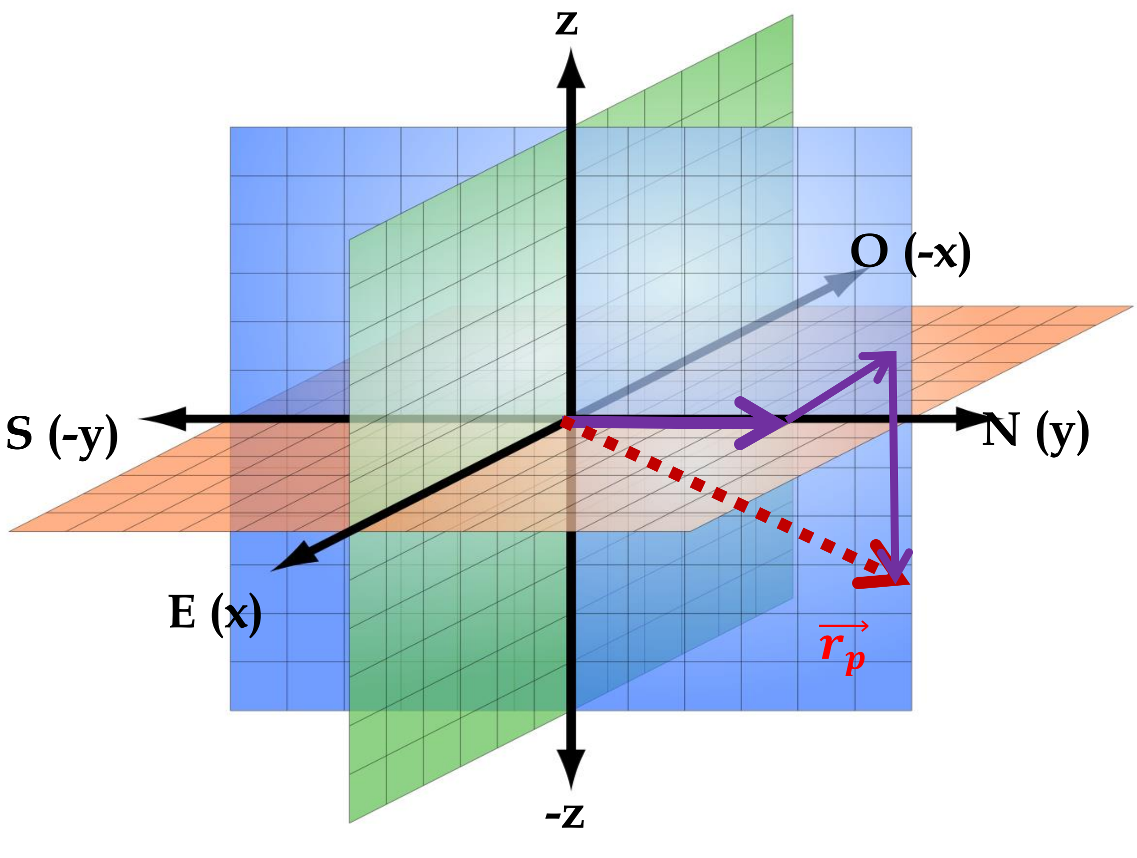
$$D = \left(486.64\ {}^{km}/_{h}\right)\left(\frac{1}{3}h\right) = 162.21\ km$$

Para la distancia que se alejará de su curso, x, en los primeros 20 min:

$$x = Dsen\alpha = (162.21\ km)(sen\ 4\ .17°) = 11.79\ km$$

4. Un hombre con una pelota parte de un punto 0, camina 100 m hacia el norte, a continuación camina 200 m hacia el oeste y en ese punto deja caer la pelota en un pozo de 50 m de profundidad. ¿Cuál es el desplazamiento de la pelota respecto al punto 0?

   Usando un sistema de referencia cartesiano con el origen en el punto 0, como se muestra en la figura.



Las posiciones del punto 0, $\vec{r}_0$, y de la pelota, $\vec{r}_p$ son:

$$\vec{r}_0 = \vec{0}\,[m] \;\; y \;\; \vec{r}_p = -200\ \hat{\imath} + 100\,\hat{\jmath} - 50\,\hat{k}\,[m]$$

$$Desplazamiento = \Delta\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_0$$

$$\therefore\ \Delta\vec{r} = \left(-200\ \hat{\imath} + 100\,\hat{\jmath} - 50\,\hat{k}\right)[m] - \left(0\ \hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}\right)[m] = -200\ \hat{\imath} + 100\,\hat{\jmath} - 50\,\hat{k}\,[m]$$

5. Dos vectores están dados por: $\vec{A} = 3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{B} = -\,\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}$. Determine:
   a) $\vec{A} + \vec{B}$
   b) $\vec{B} - \vec{A}$
   c) Un vector $\vec{C}$ tal que $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$

   Desarrollando:

   a) $\vec{A} + \vec{B} = \left(3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \left(-\,\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right) = (3-1)\hat{\imath} + (-4-1)\hat{\jmath} + (1+2)\hat{k} = 2\,\hat{\imath} - 5\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k}$
   b) $\vec{B} - \vec{A} = \left(-\,\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right) - \left(3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + \hat{k}\right) = (-1-3)\hat{\imath} + (-1+4)\hat{\jmath} + (2-1)\hat{k} = -4\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + \hat{k}$
   c) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$

   $\vec{C} = -\vec{A} - \vec{B} = (-1)\left(3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + \hat{k}\right) - \left(-\,\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right)$

   $\vec{C} = \left(-3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} - \hat{k}\right) + \left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\,\hat{k}\right) = -2\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} - 3\,\hat{k}$

   Comprobación:

$$\left(3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \left(-\,\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\,\hat{k}\right) + \left(-2\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} - 3\,\hat{k}\right) = 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

6. En un sistema coordenado cartesiano, demuestre que:
   a) $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$
   b) $\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$

Recordar que, si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 v_1) + (u_2 v_2) + (u_3 v_3)$

a) $\hat{\imath} = (1,0,0), \quad \hat{\jmath} = (0,1,0), \hat{k} = (0,0,1)$

$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = (1,0,0) \cdot (1,0,0) = (1 * 1) + (0 * 0) + (0 * 0) = 1$

$\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = (0,1,0) \cdot (0,1,0) = (0 * 0) + (1 * 1) + (0 * 0) = 1$

$\hat{k} \cdot \hat{k} = (0,0,1) \cdot (0,0,1) = (0 * 0) + (0 * 0) + (1 * 1) = 1$

b) $\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = (1,0,0) \cdot (0,1,0) = (1 * 0) + (0 * 1) + (0 * 0) = 0$

$\hat{\jmath} \cdot \hat{k} = (0,1,0) \cdot (0,0,1) = (0 * 0) + (1 * 0) + (0 * 1) = 0$

$\hat{k} \cdot \hat{\imath} = (0,0,1) \cdot (1,0,0) = (0 * 1) + (0 * 0) + (1 * 0) = 0$

7. En un sistema coordenado cartesiano, dextrógiro, demuestre que:
   a) $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$
   b) $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$; $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$; $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$

Desarrollando.

a)

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(0-0)$$

$$= 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} = \vec{0}$$

$$\hat{j} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0)$$

$$= 0\hat{\imath} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$$

$$\hat{k} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0)$$

$$= \quad 0\hat{\imath} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$$

b)

$$\hat{\imath} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(1-0)$$

$$= 0\hat{\imath} + 0\hat{j} + 1\hat{k} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(1-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0)$$

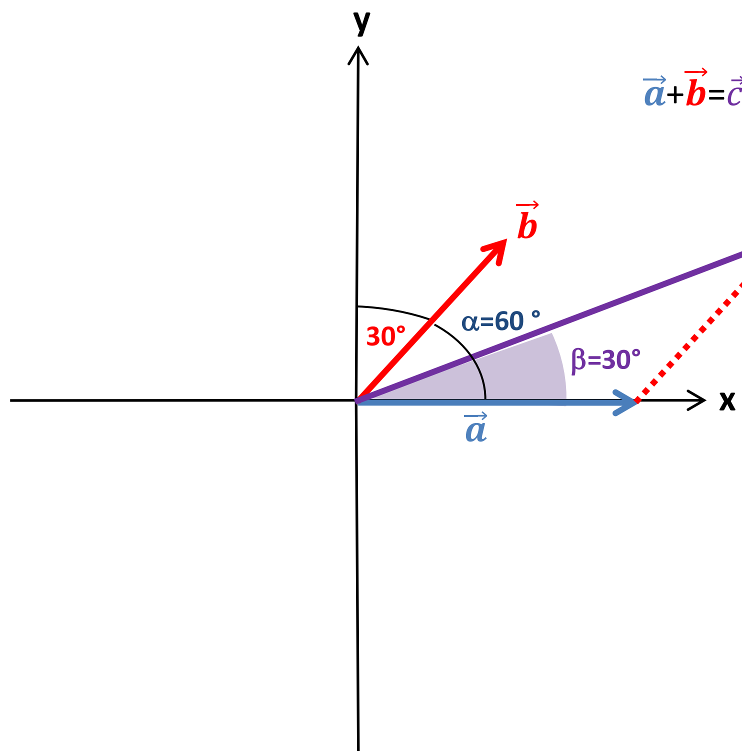
$$= 1\hat{\imath} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \hat{\imath}$$

$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{j}(0-1) + \hat{k}(0-0)$$

$$= 0\hat{\imath} + 1\hat{j} + 0\hat{k} = \hat{j}$$

8. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 60°. Uno de ellos tiene 20 unidades y hace un ángulo de 30° con el vector suma de ambos, $\vec{c}$. Determine la magnitud del segundo vector y la del vector suma.

$|\vec{a}| = 20\ u$



Para escribir explícitamente las componentes cartesianas de los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c},$ sabemos que: $sen\ \emptyset = \frac{Co}{h}$ y $cos\ \emptyset = \frac{Ca}{h}$; entonces:

$$\vec{a} = (20, 0)\ u$$

$$\vec{b} = \left(|\vec{b}|cos60°, |\vec{b}|sen60°\right)u$$

$$\vec{c} = (|\vec{c}|cos30°, |\vec{c}|sen30°)u$$

Se sustituye en la suma vectorial.

$$(|\vec{c}|cos30°\ , |c|sen30°)u = (20,0)\ u + \left(|\vec{b}|cos60°\ , |\vec{b}|sen60°\right)u$$

$$(|\vec{c}|cos30°\ , |\vec{c}|sen30°)u = \left(20 + |\vec{b}|cos60°\ , |\vec{b}|sen60°\right)\ u$$

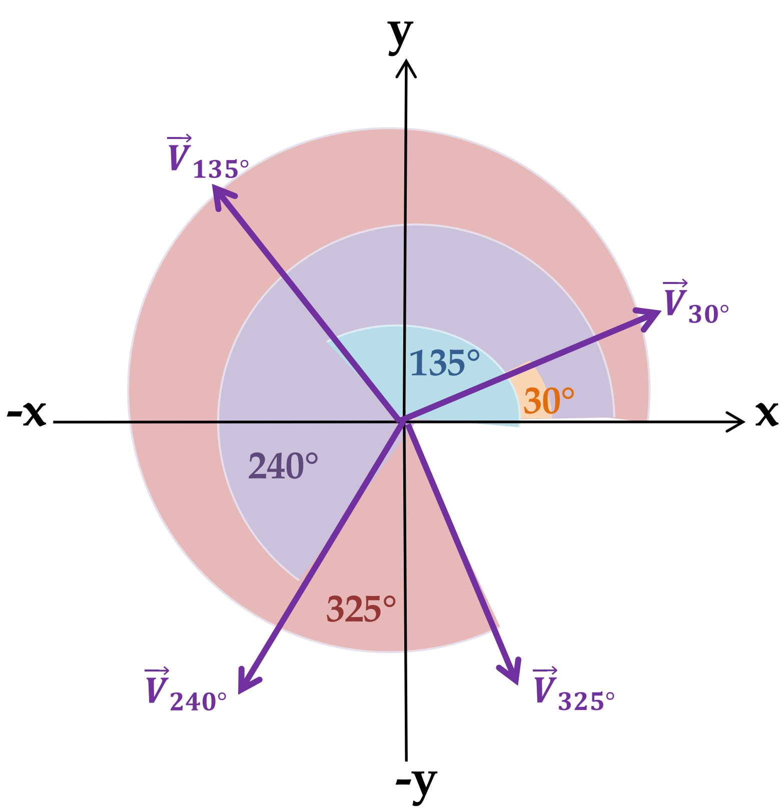
que dos vectores sean iguales significa que sus componentes deben ser iguales:

$$|\vec{c}|cos30° \ = 20\ u + \left|\vec{b}\right|cos60°$$

$$|\vec{c}|sen30° \ = \left|\vec{b}\right|sen60°$$

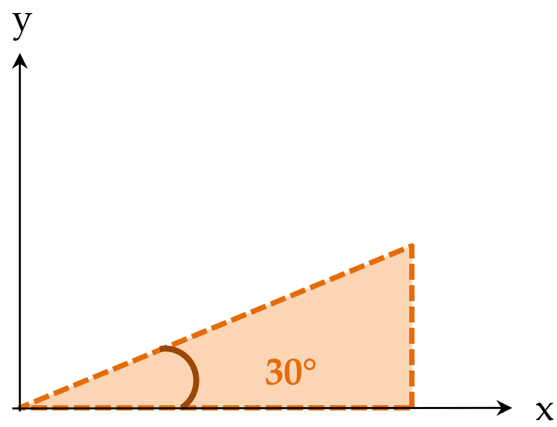
$$\therefore \left|\vec{b}\right| = 20\ u \quad y \quad |\vec{c}| = 34.6\ u$$

9. Determine las componentes rectangulares de un vector de 12 unidades de longitud cuando éste forma un ángulo con respecto al eje positivo de las X, de:
   a) 30º
   b) 135º
   c) 240º
   d) 325º



Para $\vec{V}_{30°}$:

$\left|\vec{V}_{30°}\right| = \mathbf{12}\ \boldsymbol{u}$



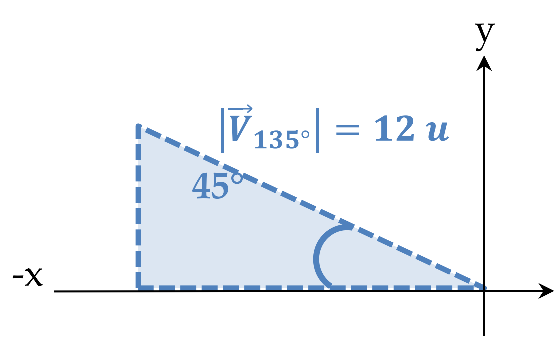
Observar que el cateto adyacente al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en x de $\vec{V}_{30°}$, mientras que el cateto opuesto al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en y, entonces:

$$cos\ 30° = \frac{\left|\vec{V}_x\right|}{\left|\vec{V}_{30°}\right|}\ \therefore \left|\vec{V}_x\right| = 12u * cos\ 30° = 10.39\ u$$

$$sen\ 30\ ° = \frac{\left|\vec{V}_y\right|}{\left|\vec{V}_{30°}\right|}\ \therefore \left|\vec{V}_y\right| = 12\ u *\ sen\ 30° = 6.00\ u$$

$$\therefore \vec{V}_{30°} = 10.39\ \hat{\imath} + 6.00\ \hat{\jmath}\ [u]$$

Para $\vec{V}_{135°}$:



Observar que el cateto adyacente al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en x de $\vec{V}_{135°}$, mientras que el cateto opuesto al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en y, entonces:

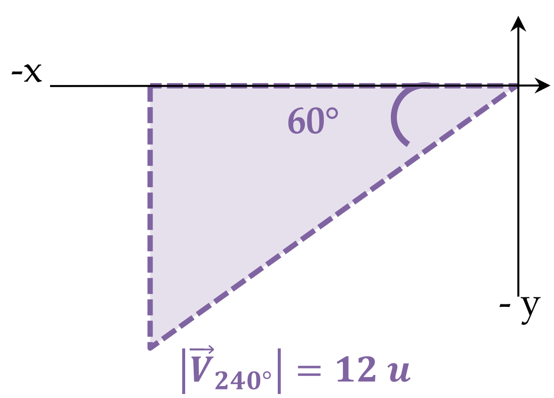
$$cos\ 45° = \frac{|\vec{V}_x|}{|\vec{V}_{135°}|}\ \therefore |\vec{V}_x| = 12u * cos\ 45° = 8.49\ u$$

$$sen\ 45\ ° = \frac{|\vec{V}_y|}{|\vec{V}_{135°}|}\ \therefore |\vec{V}_y| = 12\ u *\ sen\ 45° = 8.49\ u$$

$$\therefore \vec{V}_{135°} = -8.49\ \hat{\imath} + 8.49\ \hat{\jmath}\ [u]$$

Los signos se asocian acorde al cuadrante en que se encuentra el vector.

Para $\vec{V}_{240°}$:



Observar que el cateto adyacente al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en x de $\vec{V}_{240°}$ mientras que el cateto opuesto al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en y, entonces:

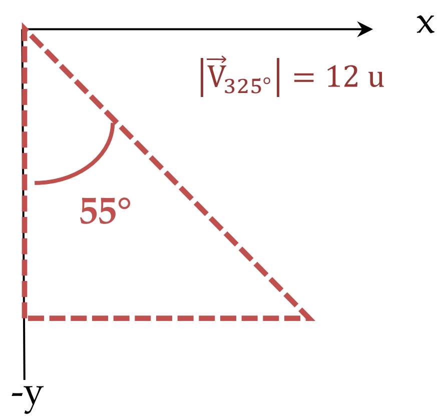
$$cos\ 60° = \frac{|\vec{V}_x|}{|\vec{V}_{240°}|}\ \therefore |\vec{V}_x| = 12u * cos\ 60° = 6.00\ u$$

$$sen\ 60\ ° = \frac{|\vec{V}_y|}{|\vec{V}_{240°}|}\ \therefore |\vec{V}_y| = 12\ u *\ sen\ 60° = 10.39\ u$$

$$\therefore \vec{\mathrm{V}}_{240°} = -6.00\ \hat{\imath} - 10.39\ \hat{\jmath}\ [\mathrm{u}]$$

Los signos se asocian acorde al cuadrante en que se encuentra el vector.

Para $\vec{\mathrm{V}}_{325°}$:



Observar que el cateto opuesto al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en x de $\vec{V}_{325°}$ mientras que el cateto adyacente al ángulo señalado corresponde a la magnitud de la componente en y, entonces:

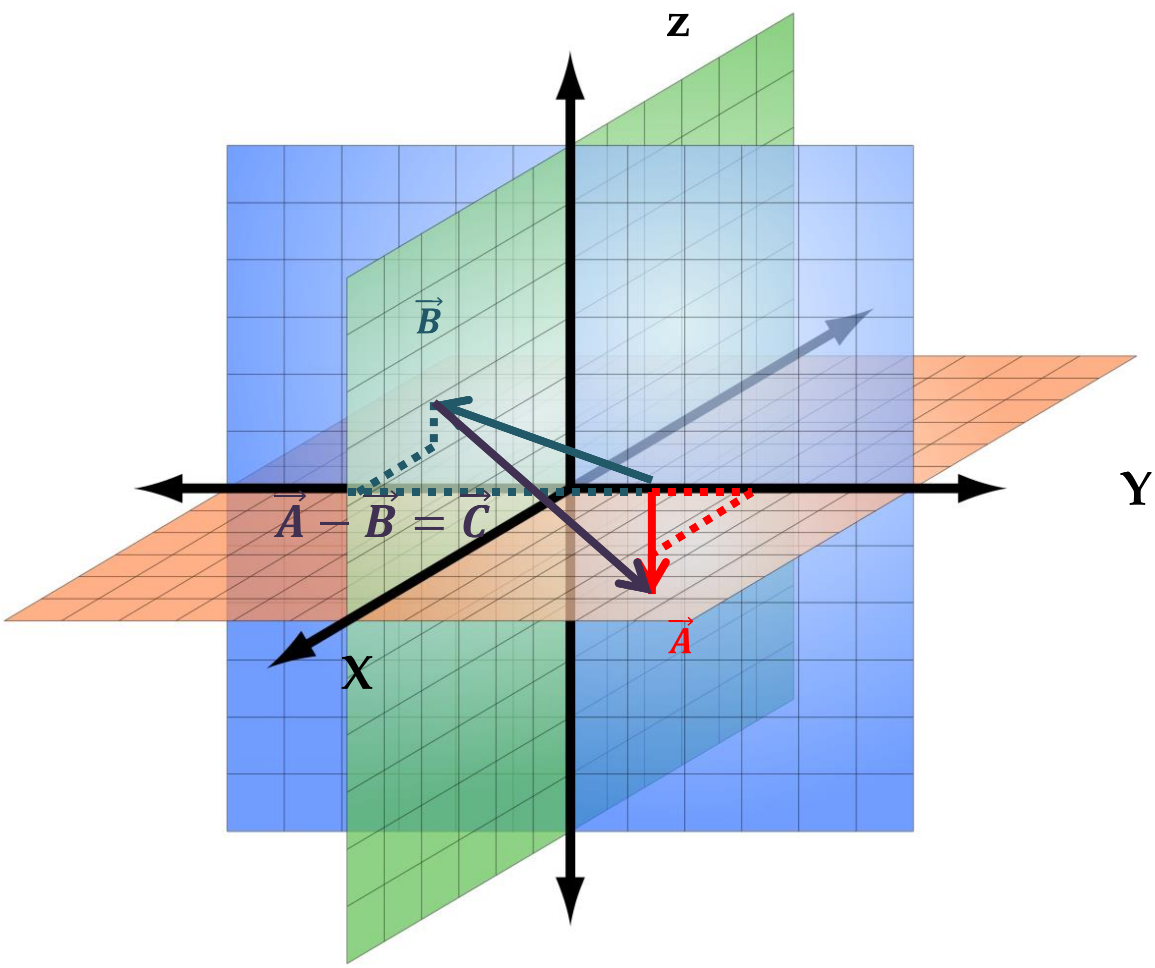
$$sen\ 55\ ° = \frac{|\vec{V}_x|}{|\vec{V}_{325°}|}\ \therefore 12\ u *\ sen\ 55° = 9.83\ u$$

$$cos\ 55° = \frac{|\vec{V}_y|}{|\vec{V}_{325°}|}\ \therefore |\vec{V}_y| = 12u * cos\ 55° = 6.88\ u$$

$$\therefore \vec{V}_{325°} = 9.83\ \hat{\imath} - 6.88\ \hat{\jmath}\ [\mathrm{u}]$$

Los signos se asocian acorde al cuadrante en que se encuentra el vector.

10. Dados los vectores $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{B} = -5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, encuentre un vector unitario en la dirección $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$



$$\vec{C} = \left(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}\right) - \left(-5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) = 7\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

$$\left|\vec{C}\right| = \sqrt{7^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{78}$$

$$\hat{C} = \left(\frac{1}{\left|\vec{C}\right|}\right)\vec{C} = \frac{7}{\sqrt{78}}\hat{\imath} + \frac{5}{\sqrt{78}}\hat{\jmath} - \frac{2}{\sqrt{78}}\hat{k} = 0.8\hat{\imath} + 0.6\hat{\jmath} - 0.2\hat{k}$$

11. Para los vectores $\vec{A} = 5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}[m]\ y\ \vec{B} = 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 6\hat{k}[m]$, calcule el ángulo más pequeño entre $\vec{A}\ y\ \vec{B}$.

El ángulo más pequeño entre dos vectores, $\propto_{AB}$, puede determinarse usando producto punto entre vectores.

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| cos\alpha_{AB}$$

Se sabe que:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (5)(4) + (4)(5) + (2)(6)m^2 = 52\ m^2$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2} = \sqrt{(5)^2 + (4)^2 + (2)^2}\ m = \sqrt{45}\ m$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2} = \sqrt{(4)^2 + (5)^2 + (6)^2}\ m = \sqrt{77}\ m$$

Sustituyendo en la primera ecuación se tiene:

$$52\ m^2 = (\sqrt{45}\ m)(\sqrt{77}\ m) cos\alpha_{AB}$$

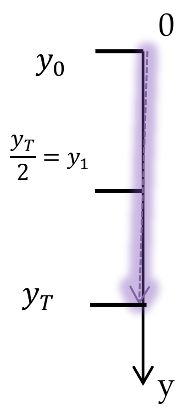
Finalmente despejando el ángulo:

$$\alpha_{AB} = cos^{-1}\left(\frac{52\ m^2}{(\sqrt{45}\ m)(\sqrt{77}\ m)}\right) = 27.95°$$

UNIDAD 3. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA.

1. Un cuerpo, partiendo del reposo, recorre la segunda mitad de su trayectoria, en caída libre, en un segundo. Encuentre:
   a) El tiempo que tarda en caer.
   b) La altura desde la que cayó.

   Usando un sistema de referencia con el origen en el punto de partida, como se muestra en la figura.



Se sabe que: $a_y = g = cte;\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \Longrightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t g dt$

Parte del reposo $v_{0y} = 0\ [m/s] \Longrightarrow v_y(t) = gt$

Como: $v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y dt = \int_0^t gtdt = \frac{1}{2}gt^2$

Tomando la posición inicial $y_0 = 0\ [m] \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}gt^2$

Sean: $y_1 = y(t_1) = \frac{y_T}{2};\ y_T = y(t_T);\ t_T = el\ tiempo\ que\ tarda\ en\ caer.$

Entonces: $y_1 = \frac{1}{2}g{t_1}^2 \ldots (1);\ y_T = \frac{1}{2}g{t_T}^2 \ldots (2)\ y\ \ t_T - t_1 = 1\ s \ldots (3)$

Restando (2) – (1) y sustituyendo de la ecuación (3): $t_T - 1 = t_1$

$$y_T - y_1 = \frac{y_T}{2} = \frac{1}{2}g({t_T}^2 - {t_1}^2) = \frac{1}{2}g[{t_T}^2 - (t_T - 1)^2]$$

Desarrollando el binomio y simplificando

$$\frac{y_T}{2} = \frac{1}{2}g(2t_T - 1) \Rightarrow y_T = 2gt_T - g$$

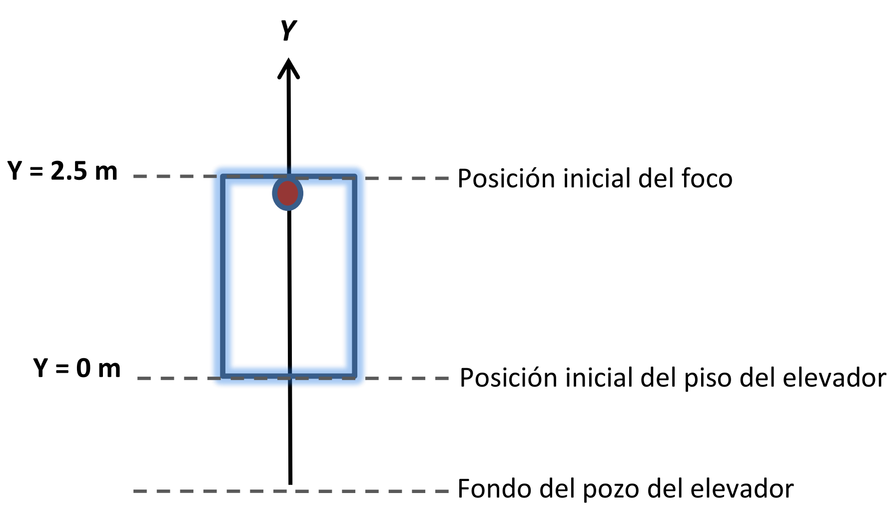
Sustituyendo (2) $y_T = \frac{1}{2}g{t_T}^2 = 2gt_T - g \Rightarrow {t_T}^2 - 4t_T + 2 = 0$

$$t_T = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \begin{Bmatrix} 3.41\ s \\ 0.59\ s \end{Bmatrix}$$

Como realiza la segunda mitad del recorrido en un segundo el tiempo total de recorrido debe ser mayor que 1 s, $\therefore\ t_T = 3.41\ [s]$. La altura desde la que cayó es igual a: y_T

$$y_T = y(t_T) = y(3.41) = \frac{1}{2}g{t_T}^2 = \frac{1}{2}(9.8)(3.41)^2 = 56.98\ [m]$$

2. Un elevador asciende con aceleración vertical, hacia arriba de magnitud 0.5 m/s². En el instante en que su velocidad ascendente es de 5.0 m/s se cae el foco del techo, que estaba mal sujetado. La altura del piso al techo del elevador es de 2.5 m. Calcule:
   a) El tiempo en que el foco cae desde el techo hasta el piso del elevador.
   b) La distancia que cayó con relación al pozo del elevador.



Hay dos objetos en movimiento en los que hay que poner atención: el piso del elevador y el foco, ambos se moverán con aceleración constante, pero de diferente valor.

Se sabe que: $a_y = cte;\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \Longrightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t a_y dt \Longrightarrow v_y(t) = v_{0y} + a_y t$

Como: $v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y dt = \int_0^t (v_{0y} + a_y t) dt \Rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$

Usando un sistema de referencia inercial fijo al fondo del pozo, como se muestra en la figura, las posiciones iniciales serán:

$del\,piso\text{:}\ \ y_{0P} = 0\ [m],\ \ del\,foco\text{:}\ \ y_{0F} = 2.5\ [m].$

El foco al soltarse lleva la velocidad del elevador, eso significa que ambos objetos, piso y foco, tienen la misma velocidad inicial:

$$v_{0yF} = v_{0yP} = 5.0\ \frac{m}{s}.$$

En cuanto el foco se suelta, actúa sobre él la aceleración de la gravedad y el piso seguirá con la aceleración del elevador, esto significa que:

$$a_{yp} = 0.5 \frac{m}{s^2}\ y\ a_{yF} = -9.8 \frac{m}{s^2}$$

Nótese que las magnitudes de las aceleraciones, las tomamos positivas cuando el vector apunta en dirección del eje y negativas cuando apunta en dirección contraria al eje.

Por consiguiente, las funciones del tiempo para las componentes respectivas de posición y velocidad de cada objeto serán:

$$y_F(t) = 2.5 + 5.0t - 4.9t^2 [m];\ v_{yF}(t) = 5.0 - 9.8t \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$y_P(t) = 5.0t + \frac{t^2}{4} [m];\ v_{yP}(t) = 5.0 + 0.5t \left[\frac{m}{s}\right]$$

Para determinar el tiempo en que el foco llega al piso del elevador, se igualan sus componentes de posición:

$$y_F(t) = y_P(t) \implies 2.5 + 5.0t - 4.9t^2 = 5.0t + \frac{t^2}{4}$$

Lo que resulta en la siguiente ecuación cuadrática para el tiempo:

$$10 - 20.6t^2 = 0$$

Resolviendo y tomando el valor positivo, el tiempo en que el foco cae desde el techo hasta el piso del elevador resulta t = 0.7 [s]. Sustituyendo este tiempo en las componentes de velocidad y posición se obtiene:

$$y_F(0.7) = 2.5 + 5.0(0.7) - 4.9(0.7)^2[m];\ v_{yF}(t) = 5.0 - 9.8(0.7)\left[\frac{m}{s}\right]$$

Con los valores obtenidos, escribimos los vectores correspondientes:

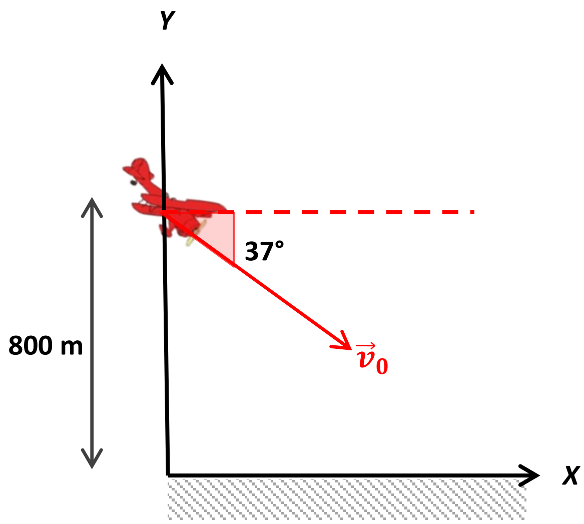
$$\therefore\ \vec{r}_F(0.7) = 3.6\hat{\jmath}[m]\ \ y\ \ \vec{v}_F(0.7) = -1.9\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$y_P(0.7) = 5.0(0.7) + \frac{(0.7)^2}{4}[m];\ v_{yP}(0.7) = 5.0 + 0.5(0.7)\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\therefore\ \vec{r}_P(0.7) = 3.6\hat{\jmath}[m]\ \ y\ \ \vec{v}_P(0.7) = 5.4\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Esto nos indica que el foco no baja con respecto al fondo del pozo del elevador, primero se mueve hacia arriba y luego hacia abajo mientras el piso se mueve hacia arriba continuamente. Cuando se encuentran ambos están 3.6 metros arriba del origen del sistema de referencia, y como al inicio el foco estaba en 2.5 m, esto significa que cuando el foco toca el piso del elevador está a 1.1 m de su posición inicial, por consiguiente, subió 1.1 m.

3. Un bombardero en picada a un ángulo de 37º respecto a la horizontal, deja caer una bomba a una altura de 800.0 m. La bomba choca con la tierra 5.0 s después de ser soltada. Calcule:
   a) La rapidez del bombardero.
   b) La distancia horizontal recorrida por la bomba.
   c) La velocidad de la bomba (magnitud y dirección) un instante antes de tocar el suelo.



Cuando la bomba se suelta del bombardero tiene la velocidad de dicho bombardero, $\vec{v}_0$, y estará sujeta a la aceleración de la gravedad, que se considera constante, por consiguiente el movimiento que realiza la bomba ocurre en dos dimensiones, con aceleración constante y con las condiciones iniciales, acorde al sistema de referencia mostrado en la figura:

$$\vec{a} = -9.8\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s^2}\right];\ \vec{v}_0 = |\vec{v}_0|cos(37°)\hat{\imath} - |\vec{v}_0|sen(37°)\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right];\ \vec{r}_0 = 800\hat{\jmath}[m]$$

Como no hay componente de aceleración en la dirección X, significa que la componente X de velocidad no cambia durante el movimiento de la bomba,

$$\Longrightarrow v_x(t) = v_{0x} = |\vec{v}_0|cos(37°)$$

Para la componente Y de velocidad:

$$a_y = cte = -9.8\left[\frac{m}{s^2}\right];\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \Longrightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t a_y dt \Longrightarrow$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t = -|\vec{v}_0|sen(37°) - 9.8t$$

Para las componentes de posición, con la condición inicial $\vec{r}_0 = 800\hat{\jmath}[m]$:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v_{0x} dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x}t = |\vec{v}_0|cos(37°)t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y dt = \int_0^t \left(v_{0y} + a_y t\right) dt$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 800 - |\vec{v}_0|sen(37°)t - 4.9\, t^2$$

Las funciones correspondientes para posición, velocidad y aceleración son:

$$\vec{r}(t) = \{|\vec{v}_0|cos(37°)t\}\hat{\imath} + \{800 - |\vec{v}_0|sen(37°)t - 4.9\, t^2\}\hat{\jmath}[m]$$

$$\vec{v}(t) = \{|\vec{v}_0|cos(37°)\}\hat{\imath} - \{|\vec{v}_0|sen(37°) + 9.8\, t\}\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\vec{a}(t) = -9.8\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Se sabe que la bomba llega al piso en 5 segundos, entonces la función de la posición de la bomba al final de recorrido puede escribirse así:

$$\vec{r}(5) = \{|\vec{v}_0|cos(37°)5\}\hat{\imath} + \{800 - |\vec{v}_0|sen(37°)5 - 4.9\,(5)^2\}\hat{\jmath}[m]$$

Y el valor explícito del vector puede escribirse así:

$$\vec{r}(5) = x\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}[m]$$

Como es el mismo vector, sus componentes deben ser iguales, lo que deja el siguiente sistema de ecuaciones escalares:

$$x = |\vec{v}_0|cos(37°)5$$

$$0 = 800 - |\vec{v}_0|sen(37°)5 - 4.9\,(5)^2$$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$|\vec{v}_0| = \frac{800 - 4.9\,(5)^2}{5sen(37°)} = 225.15\left[\frac{m}{s}\right]$$

Que corresponde a la rapidez del bombardero, inciso a).

Usando este resultado en la ecuación para x se obtiene:

$$x = 5(225.15)cos(37°) = 899\ m$$

Que corresponde a la componente horizontal de la posición al llegar al piso y es la distancia horizontal recorrida por la bomba, inciso b).

Para determinar la velocidad de la bomba un instante antes de tocar el suelo, se evalúa $\vec{v}(t)$, para $t = 5[s]$, obteniéndose:

$$\vec{v}(5) = \{225.15cos(37°)\}\hat{\imath} - \{225.15sen(37°) + 9.8\,(5)\}\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right] = 179.81\hat{\imath} - 184.50\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Para obtener la magnitud:

$$|\vec{v}(5)| = \sqrt{(179.81)^2 + (-184.50)^2} = 257.63\left[\frac{m}{s}\right]$$

Para obtener el ángulo:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{-184.50}{179.81}\right) = -45.74°\ con\ la\ horizontal$$

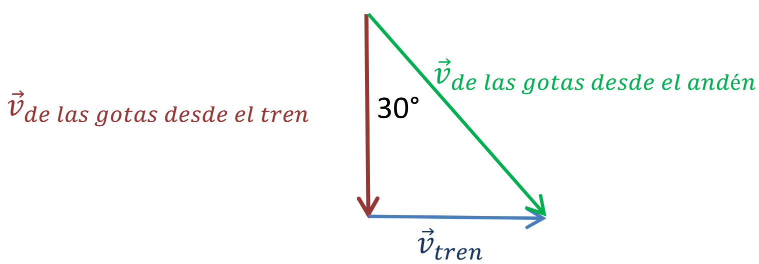
Que es la respuesta al inciso c).

4. Un tren viaja hacia el este con rapidez de 100.0 km/h (respecto al piso), bajo la lluvia desviada hacia el este por el viento. Las trayectorias de las gotas de lluvia forman ángulos de 30º con la vertical, medido por un observador que permanece en el andén. Un pasajero sentado en el tren ve las gotas de agua caer verticalmente. Calcule la rapidez de las gotas de agua con respecto al andén. Sean:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{de\ las\ gotas\ desde\ el\ tren}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{de\ las\ gotas\ desde\ el\ andén}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{tren}$$



Usando ley de senos y las magnitudes de los vectores de velocidad:

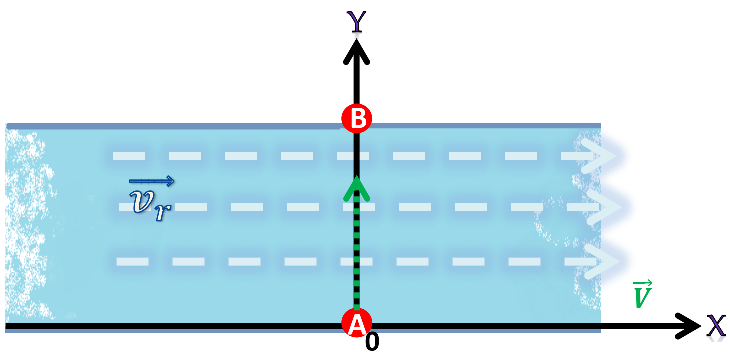
$$\frac{|\vec{v}_2|}{sen\ 30°} = \frac{|\vec{v}|}{sen\ 90°} = \frac{|\vec{v}_1|}{sen\ 60°}$$

Entonces:

$$|\vec{v}| = \frac{|\vec{v}_2|}{sen\ 30°} = \frac{100.0\frac{km}{h}}{0.5} = 200.0\frac{km}{h}$$

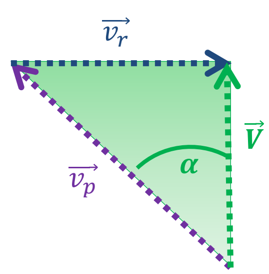
La rapidez de las gotas de agua con respecto al andén es 200.0 km/h.

5. Una persona puede remar en un bote con rapidez constante de 2.0 m/s en aguas tranquilas.
   a) Si está cruzando un río donde la corriente es de 0.5 m/s a partir del punto A ¿En qué dirección deberá dirigir su bote si quiere alcanzar un punto que está directamente enfrente al lugar de salida, punto B?
   b) Si el río tiene 50.0 m de ancho ¿cuánto tardará en atravesarlo?
   c) ¿Cuánto tardará en recorrer 50.0 m a favor de la corriente?
   d) ¿Cuánto tardará en recorrer 50.0 m en contra de la corriente?
   e) ¿En qué dirección deberá dirigir el bote si quiere cruzar en el menor tiempo posible?



a) Se quiere calcular el ángulo con que debe remar la persona, para que la velocidad resultante sea en la dirección AB. La velocidad resultante será, $\vec{V} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_p}$; con:

- $\overrightarrow{v_r} = velocidad\ del\ río$
- $|\overrightarrow{v_r}| = 0.5\,\frac{m}{s}$
- $\overrightarrow{v_p} = velocidad\ de\ la\ persona$
- $|\overrightarrow{v_p}| = 2.0\,\frac{m}{s}$



$$sen\ \alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r}|}{|\overrightarrow{v_p}|}\ \therefore\ \alpha = sen^{-1}\frac{|\overrightarrow{v_r}|}{|\overrightarrow{v_p}|}$$

Sustituyendo los valores de rapidez, se obtiene:

$$\alpha = sen^{-1}\frac{0.5\,\frac{m}{s}}{2.0\,\frac{m}{s}} = 14.5\,°$$

b) Al trabajar con el vector resultante, $\vec{V}$, el problema que originalmente se planteó en dos dimensiones, ahora se simplifica en un ejercicio de una sola dimensión (de acuerdo al marco de referencia se trabajará sobre el eje y). Se usará $v_y = |\vec{V}|$ y para calcular $|\vec{V}|$, se puede hacer uso del teorema de Pitágoras:

$$|\overrightarrow{v_p}|^2 = |\overrightarrow{v_r}|^2 + |\vec{V}|^2$$

Al despejar $|\vec{V}|$ y sustituir se obtiene

$$v_y = |\vec{V}| = \sqrt{|\overrightarrow{v_p}|^2 - |\overrightarrow{v_r}|^2} = \sqrt{\left(2.0\,\frac{m}{s}\right)^2 - \left(0.5\,\frac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{3.75} = 1.94\,\frac{m}{s}$$

Como:

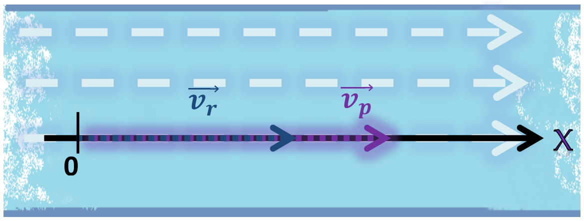
$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_i}^{y_f} dy = \int_0^t v_y dt \Rightarrow y_f - y_i = v_y t$$

$$y_f = y_i + v_y t \ \Rightarrow t = \frac{y_f - y_i}{v_y}$$

Donde $y_f = Punto\ B$ y $y_i = Punto\ A$; de acuerdo con el marco de referencia planteado: $y_i = 0\,m$ y el planteamiento del problema menciona que el ancho del río mide 50.0 m entonces, $y_f = 50.0\,m \ \therefore\ y_f - y_0 = 50.0\,m - 0\,m = 50.0\,m$.

$$\therefore t = \frac{50.0\,m}{1.94\,\frac{m}{s}} = 25.82\,s$$

c) Ahora la situación cambia, el navegante no intenta cruzar el río, se moverá a favor de la corriente, esto significa que los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{v_p}$ son paralelos.



La velocidad resultante es: $\vec{V} = \vec{v_r} + \vec{v_p} = 2.0\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right] + 0.5\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right] = 2.5\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right]$.

Nuevamente el movimiento ocurre en una dimensión, X, ahora se usará $v_x = 2.5\left[\frac{m}{s}\right]$

Como:

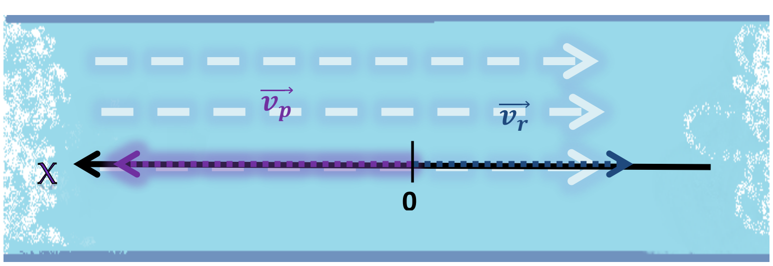
$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_i}^{x_f} dx = \int_0^t v_x dt \Rightarrow x_f - x_i = v_x t$$

$$x_f = x_i + v_x t \Rightarrow t = \frac{x_f - x_i}{v_x}$$

De acuerdo con el marco de referencia planteado: $x_f = 50.0\, m$ y $x_i = 0\, m$; $\Delta x = x_f - x_i = 50.0\, m - 0\, m = 50.0\, m$.

$$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{50.0\, m}{2.5\frac{m}{s}} = 20.0\, s$$

d) Ahora el navegante se moverá en contra de la corriente, esto significa que los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{v_p}$ son antiparalelos.

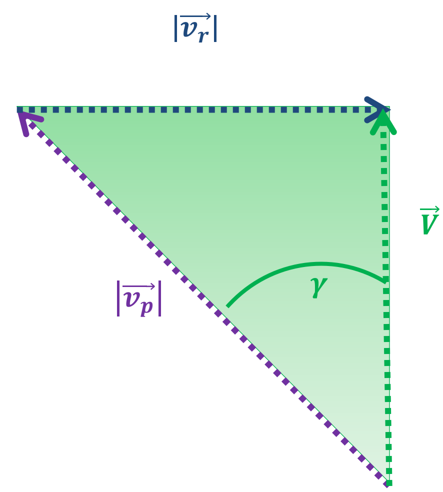


La velocidad resultante es: $\vec{V} = \vec{v_r} + \vec{v_p} = 2.0\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right] - 0.5\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right] = 1.5\hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right]$.

Nuevamente el movimiento ocurre en una dimensión, X, ahora se usará $v_x = 1.5\left[\frac{m}{s}\right]$

Del inciso anterior tenemos que: $x_f = x_i + v_x t \Rightarrow t = \frac{x_f - x_i}{v_x}$, de acuerdo al marco de referencia planteado: $x_f = 50.0\ m$ y $x_i = 0\ m$; $\Rightarrow \Delta x = 50.0\ m - 0\ m = 50.0\ m$.

$$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{50.0\ m}{1.5\frac{m}{s}} = 33.3\ s$$



e) Regresando al problema en dos dimensiones, para determinar en qué dirección deberá dirigir el bote si quiere cruzar en el menor tiempo posible, como el ancho del río no cambia entonces lo que modificará el tiempo de cruce es la magnitud de la velocidad $|\vec{V}|$, de tal forma que se busca la mayor $|\vec{V}|$ posible; como $\vec{V} = \vec{v_r} + \vec{v_p}$ de la figura se tiene: $\cos\gamma = \frac{|\vec{V}|}{|\vec{v_p}|}$; como se desea maximizar $|\vec{V}|$ como función del ángulo, se despeja $|\vec{V}| = |\vec{v_p}|\cos\gamma$ y se utilizan los criterios del cálculo diferencial:

$$\frac{d|\vec{V}|}{d\gamma} = \frac{d}{d\gamma}\left(|\vec{v_p}|\cos\gamma\right) = -|\vec{v_p}|sen\gamma$$

Se iguala a cero para obtener el punto crítico $0 = -|\vec{v_p}|sen\,\gamma$, esto implica que:

I. $|\vec{v_p}| = \mathbf{0}$ **m/s,** lo que es físicamente imposible pues de ser así significaría que la persona está en reposo y no es congruente con la situación,

II. $sen\,\gamma = 0$, entonces, $\gamma = 0$

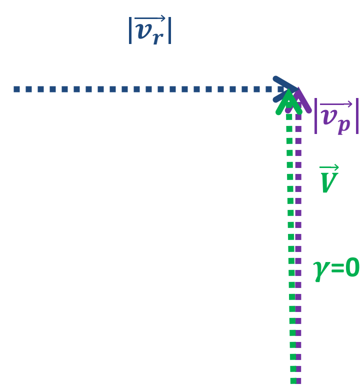
Usando el criterio de la segunda derivada

$$\frac{d^2|\vec{V}|}{d\gamma^2} = \frac{d^2}{d\gamma^2}\left(|\overrightarrow{v_p}|cos\,\gamma\right) = \frac{d}{d\gamma}\left(-|\overrightarrow{v_p}|sen\,\gamma\right) = -|\overrightarrow{v_p}|cos\,\gamma$$

Al sustituir el valor obtenido de $\gamma = 0$

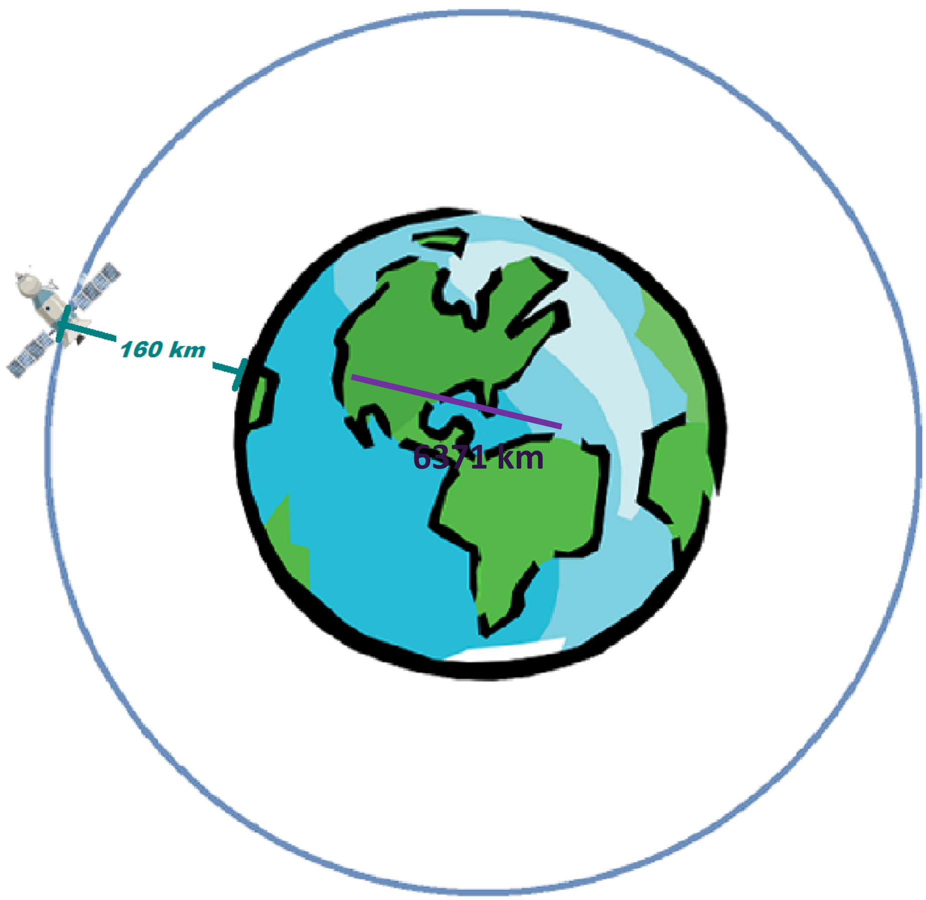
$$-|\overrightarrow{v_p}|cos\,0 \; < 0 \;\therefore es\;un\;máximo$$

Es decir: $\vec{V}$ y $\overrightarrow{v_p}$ son paralelos lo que implica que la dirección en la que debe navegar la persona es perpendicular a la corriente del río, para tardar el menor tiempo posible en cruzarlo, aunque al final de su recorrido no llegará al punto B.



6. Un satélite artificial gira en una órbita circular a una altura de 160.0 km sobre la superficie de la Tierra, dando una vuelta en 90.0 min, calcule:
   a) La rapidez del satélite, medida desde el centro de la Tierra.
   b) La magnitud de la aceleración centrípeta que experimenta el satélite.

   a) Para poder resolver el ejercicio es necesario conocer el radio de la circunferencia de la órbita del satélite, se conoce solo una fracción de este y el resto corresponde al radio de la Tierra; si bien el radio de la Tierra difiere dependiendo de que parte de la misma estemos midiendo, se supondrá que la Tierra es una esfera perfecta y se tomará como valor el radio medio: 6371.0 km. Por lo tanto $r = 160.0\;km + 6371.0\;km = 6531.0\;km$



Se sabe que tarda 90.0 minutos en dar una vuelta, es decir: $\frac{2\,\pi\,rad}{90.0\,min}$

$$\Rightarrow\ \omega = \frac{2\,\pi\,rad}{90.0\,min} \times \frac{1\,min}{60.0\,s} = 1.16\ \times 10^{-3}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\therefore\ \ |\vec{v}| = \omega\, r = 1.16\ \times 10^{-3}\,\frac{rad}{s} \times 6531.0\,km \times \frac{1000.0\,m}{1.0\,km} = 7575.96\left[\frac{m}{s}\right]$$

b) Se sabe que $|\overrightarrow{a_c}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$

$$\therefore |\overrightarrow{a_c}| = \frac{\left(7575.96\,\frac{m}{s}\right)^2}{6.531\ \times 10^6\,m} = 8.79\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

7. Un cuerpo gira en un círculo de radio 50.0 cm, la línea imaginaria que une al cuerpo con el centro, tiene rapidez angular dada por la expresión

$$\omega(t) = At - Bt^2 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Donde A = 5.0 rad/s^2 y B = 0.25 rad/s^3. Tomando como positivo el giro en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj calcule, para el instante t = 3.0 s.

   a) La rapidez del cuerpo. [Medida desde el centro del círculo]
   b) La magnitud de la aceleración que experimenta el cuerpo.

a) Se evalúa $\omega(3.0) = \left(5.0\,\frac{rad}{s^2}\right)(3.0\,s) - \left(0.25\,\frac{rad}{s^3}\right)(3.0\,s)^2 = 12.75\left[\frac{rad}{s}\right]$

$$\therefore |\vec{v}(3.0)| = r\omega(3.0) = \left(12.75\,\frac{rad}{s}\right)(50.0\,cm)\left(\frac{1\,m}{100.0\,cm}\right) = 6.38\left[\frac{m}{s}\right]$$

b) Se sabe que la celeridad angular es:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = A - 2Bt\left[\frac{rad}{s^2}\right]. \text{ Se evalúa para t = 3.0 s.}$$

$$\alpha(3.0) = \left(5.0\,\frac{rad}{s^2}\right) - 2\left(0.25\,\frac{rad}{s^3}\right)(3.0\,s) = 3.5\left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Usando

$$|\vec{a_c}(3.0)| = \frac{|\vec{v}(3.0)|^2}{r} = \frac{\left(6.38\,\frac{m}{s}\right)^2}{0.5\,m} = 81.41\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$|\vec{a_t}(3.0)| = r\alpha(3.0) = (0.5\,m)\left(3.5\,\frac{rad}{s^2}\right) = 1.75\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Se sabe que la aceleración total es $\vec{a} = \vec{a_c} + \vec{a_t}$, como se quiere calcular solo la magnitud de $\vec{a}$ y los vectores $\vec{a_c}\ y\ \vec{a_t}$ son ortogonales:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a_c}|^2 + |\vec{a_t}|^2}$$

$$|\vec{a}(3.0)| = \sqrt{|\vec{a_c}(3.0)|^2 + |\vec{a_t}(3.0)|^2} = \sqrt{(81.41)^2 + (1.75)^2}\left[\frac{m}{s^2}\right] = 81.41\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

8. Un electrón que gira con rapidez constante alrededor de un núcleo, describiendo una órbita circular de radio 5.29x10^{-12} [m], tarda 1.53x10^{-18} [s] en cumplir un ciclo. Determine, en [m/s^2], la magnitud de la aceleración del electrón.

Se sabe que el electrón tarda 1.53x10^{-18} [s] en cumplir un ciclo, es decir: $\frac{2\,\pi\, rad}{1.53\times 10^{-18}\,[\mathrm{s}]}$

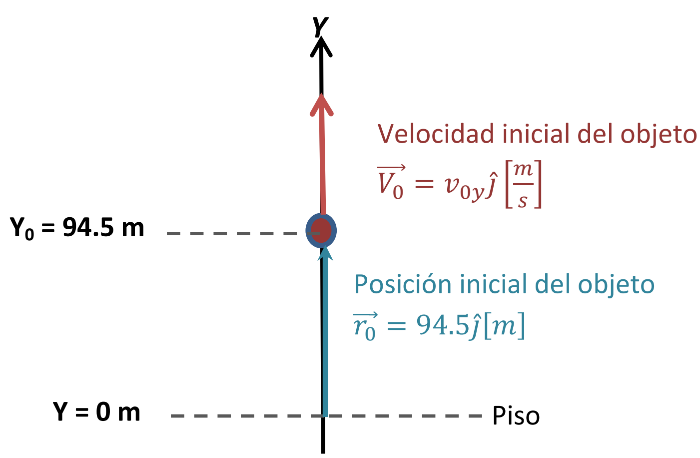
$$\Rightarrow \ \omega = \frac{2\,\pi\, rad}{1.53\times 10^{-18}\,[\mathrm{s}]} = 4.1\ \times 10^{18}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Se sabe que $|\overrightarrow{a_c}| = r\omega^2$

$$\therefore\ |\overrightarrow{a_c}| = (5.29\times 10^{-12})(4.1\ \times 10^{18})^2 = 8.9\times 10^{25}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

9. Determine la velocidad, en [m/s], con la que debe lanzarse verticalmente hacia arriba, un objeto desde una altura de 94.5 [m] para que llegue al piso con rapidez de 70.0 [m/s].

Usando un marco de referencia inercial fijo al piso, como se muestra en la figura, se establecen la posición y la velocidad iniciales:



En cuanto el objeto se lanza, actúa sobre él la aceleración de la gravedad, esto significa:

$$\vec{a} = a_y\hat{j} = -9.8\hat{j}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Se sabe que: $a_y = cte$; $a_y = \frac{dv_y}{dt} \Longrightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t a_y dt \Longrightarrow v_y(t) = v_{0y} + a_y t$

Como: $v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y dt = \int_0^t (v_{0y} + a_y t) dt \Rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$

Sustituyendo los valores de $\vec{r_0}, \vec{v_0}$ y $\vec{a}$, se obtiene:

$$y(t) = 94.5 + v_{0y}t - 4.9t^2$$

$$v_y(t) = v_{0y} - 9.8t$$

Como se quiere que el objeto llegue al piso con rapidez 70.0 [m/s]. Esto significa que debe cumplirse simultáneamente que: $y = 0\ [m]\ y\ v_y = -70.0\ \left[\frac{m}{s}\right]$. Acorde al marco de referencia empleado, el signo de v_y indica que el objeto viaja hacia abajo.

Usando estos valores en las ecuaciones correspondientes, se obtiene un sistema de ecuaciones simultáneas:

$$0 = 94.5 + v_{0y}t - 4.9t^2$$

$$-70.0 = v_{0y} - 9.8t$$

De la segunda ecuación se despeja v_{oy}

$$v_{oy} = 9.8t - 70.0$$

Se sustituye en la segunda y se despeja el tiempo,

$$0 = 94.5 + (9.8t - 70.0)t - 4.9t^2$$

$$0 = 94.5 + 9.8t^2 - 70.0t - 4.9t^2$$

$$0 = 94.5 - 70.0t + 4.9t^2$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para el tiempo se obtiene

$$t = \frac{70.0 \pm \sqrt{(70.0)^2 - 4(94.5)(4.9)}}{2(4.9)} = \frac{70.0 \pm \sqrt{3047.8}}{9.8} = \begin{Bmatrix} 12.8\ s \\ 1.5\ s \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo estos valores para el tiempo en:

$$v_{oy} = 9.8t - 70.0$$

Resulta

$$v_{oy} = 9.8(12.8) - 70.0 = 55.4 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$v_{oy} = 9.8(1.5) - 70.0 = -55.4 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Los dos resultados son correctos desde el punto de vista de la física, el primero representa la situación planteada en el problema, el objeto se lanza verticalmente hacia arriba y entonces la respuesta correcta es:

$$\overrightarrow{v_0} = 55.4\hat{\jmath} \left[\frac{m}{s}\right]$$

El segundo resultado representa la situación cuando el objeto es lanzado verticalmente hacia abajo, en cuyo caso

$$\overrightarrow{v_0} = -55.4\hat{\jmath} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Que no es la respuesta del problema, pero puede notarse que cuando el objeto se lanza verticalmente hacia arriba, tarda más tiempo en llegar al piso, porque primero va a subir hasta llegar a su altura máxima y después viajará hacia abajo hasta llegar al piso. Cuando se lanza verticalmente hacia abajo viaja directamente hacia el piso, por eso tarda menos tiempo en llegar.

10. Una mujer corre en línea recta con velocidad de magnitud 5.1 [m/s] para tomar un autobús que se encuentra estacionado. Cuando ella está a 11.0 [m] del autobús, éste deja la parada con aceleración de magnitud 1.0 [m/s^2] (alejándose de la mujer). Cuando la mujer alcanza al autobús, ¿qué velocidad tiene el autobús?

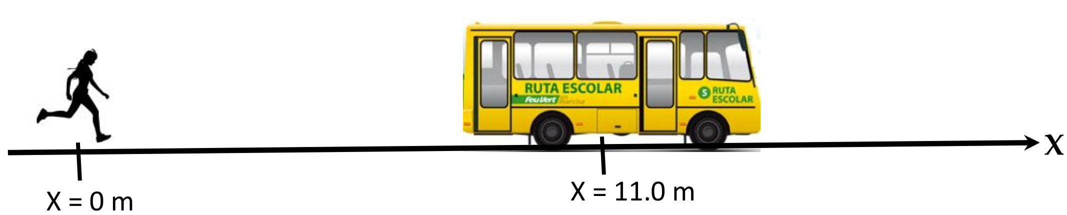
Hay dos objetos en movimiento en los que hay que poner atención: la mujer y el autobús, la mujer se mueve con velocidad constante y por consiguiente su aceleración es cero, el autobús se mueve partiendo del reposo con aceleración constante.

Se sabe que: $a_x = cte;\ a_x = \frac{dv_x}{dt} \Longrightarrow \int_{v_{0x}}^{v_x(t)} dv_x = \int_0^t a_x dt \Longrightarrow v_x(t) = v_{0x} + a_x t$

Como: $v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v_x dt = \int_0^t (v_{0x} + a_x t) dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$

Usando un marco de referencia inercial, como se muestra en la figura, las posiciones iniciales respectivas serán:

$de\ la\ mujer:\ x_{0M} = 0\ [m],\ del\ autobús:\ x_{0A} = 11.0\ [m].$



De igual forma se establecen velocidad inicial y aceleración para la mujer y al autobús:

$$de\ la\ mujer:\ v_{0xM} = 5.1\left[\frac{m}{s}\right]\ y\ a_{xM} = 0\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$del\ autobús: v_{0xA} = 0\left[\frac{m}{s}\right]\ y\ a_{xA} = 1.0\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Por consiguiente, las funciones del tiempo para las componentes respectivas de posición y velocidad de cada uno serán:

$$x_M(t) = 5.1t[m];\ v_{xM}(t) = 5.1\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$x_A(t) = 11.0 + \frac{t^2}{2}[m];\ v_{xA}(t) = t\left[\frac{m}{s}\right]$$

Para determinar la velocidad que tiene el autobús cuando la mujer lo alcanza, primero se igualan las posiciones de ambos para determinar el tiempo que tardan en alcanzarse:

$$x_M(t) = x_A(t) \Longrightarrow 5.1t = 11.0 + \frac{t^2}{2}$$

Lo que resulta en la siguiente ecuación cuadrática para el tiempo:

$$\frac{t^2}{2} - 5.1t + 11.0 = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtienen dos tiempos, $t_1 = 3.1$ [s] y $t_2 = 7.1$ [s]. Los dos resultados son correctos desde el punto de vista de la física, el primero representa el tiempo que tarda la mujer en alcanzar al autobús. Sustituyendo este tiempo en la componente de velocidad del autobús:

$$v_{xA}(t) = t\left[\frac{m}{s}\right] = 3.1\left[\frac{m}{s}\right]$$

La velocidad que tiene el autobús cuando la mujer lo alcanza es:

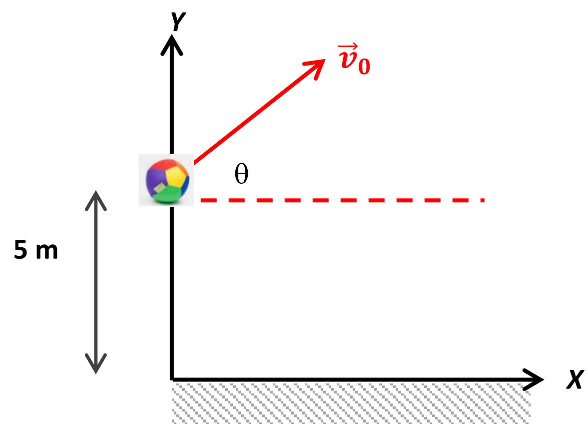
$$\therefore\ \vec{v}_A(3.1) = 3.1\ \hat{\imath}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Que es la respuesta correcta.

Si la mujer no se sube al autobús, sino que continúa corriendo, rebasaría al autobús, pero como la velocidad del autobús está aumentando, el segundo tiempo representaría el tiempo que tarda el autobús en alcanzar a la mujer.

11. Un objeto es lanzado, describiendo un movimiento de proyectil, desde una altura de 5 [m]. Si el objeto recorre horizontalmente 3 [m] llegando al piso y el tiempo de vuelo es 2 [s]; determine, en grados, el ángulo de lanzamiento con respecto a la horizontal.

En la figura se muestra el marco de referencia que se usará para desarrollar la solución.



Cuando se lanza el objeto tiene la velocidad, $\vec{v}_0$, y estará sujeta a la aceleración de la gravedad, que se considera constante, por consiguiente el movimiento que realiza el objeto ocurre en dos dimensiones, con aceleración constante y con las condiciones iniciales, acorde al sistema de referencia mostrado en la figura:

$$\vec{a} = -9.8\hat{j}\left[\frac{m}{s^2}\right];\ \vec{v}_0 = |\vec{v}_0|cos(\theta)\hat{\imath} + |\vec{v}_0|sen(\theta)\hat{j}\left[\frac{m}{s}\right];\ \vec{r}_0 = 5\hat{j}[m]$$

Como no hay componente de aceleración en la dirección X, significa que la componente X de velocidad no cambia durante el movimiento del objeto,

$$\Rightarrow v_x(t) = v_{0x} = |\vec{v}_0|\cos(\theta)$$

Para la componente Y de velocidad:

$$a_y = cte = -9.8\left[\frac{m}{s^2}\right];\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t a_y dt \Rightarrow$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t = |\vec{v}_0|sen(\theta) - 9.8t$$

Para las componentes de posición, con la condición inicial $\vec{r}_0 = 5\hat{\jmath}[m]$:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v_{0x} dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x}t = |\vec{v}_0| \cos(\theta)\, t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y dt = \int_0^t \left(v_{0y} + a_y t\right) dt$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 5 + |\vec{v}_0| sen(\theta) t - 4.9\, t^2$$

Las funciones correspondientes para posición, velocidad y aceleración son:

$$\vec{r}(t) = \{|\vec{v}_0| cos(\theta) t\}\hat{\imath} + \{5 + |\vec{v}_0| sen(\theta) t - 4.9\, t^2\}\hat{\jmath}[m]$$

$$\vec{v}(t) = \{|\vec{v}_0| cos(\theta)\}\hat{\imath} + \{|\vec{v}_0| sen(\theta) - 9.8\, t\}\hat{\jmath} \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\vec{a}(t) = -9.8\hat{\jmath} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Se sabe que el objeto recorre horizontalmente 3 [m] y el tiempo de vuelo es 2 [s]; entonces la función de la posición del objeto al final del recorrido puede escribirse así:

$$\vec{r}(2) = \{|\vec{v}_0| cos(\theta)(2)\}\hat{\imath} + \{5 + |\vec{v}_0| sen(\theta)(2) - 4.9\, (2)^2\}\hat{\jmath}[m]$$

Y el valor explícito del vector puede escribirse así:

$$\vec{r}(2) = 3\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}[m]$$

Como es el mismo vector, sus componentes deben ser iguales, lo que deja el siguiente sistema de ecuaciones escalares:

$$3 = 2|\vec{v}_0| cos(\theta)$$

$$0 = 5 + 2|\vec{v}_0| sen(\theta) - 4.9\, (2)^2 = 2|\vec{v}_0| sen(\theta) - 14.6$$

Rescribiendo la segunda ecuación:

$$14.6 = 2|\vec{v}_0| sen(\theta)$$

Despejando $|\vec{v}_0|$ de la primera se obtiene:

$$|\vec{v}_0| = \frac{3}{2cos\theta}$$

Sustituyendo en la segunda

$$14.6 = 2|\vec{v}_0|sen(\theta) = 2\left(\frac{3}{2cos\theta}\right)sen(\theta)$$

Simplificando

$$14.6 = 3tan(\theta)$$

Para obtener el ángulo:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{14.6}{3}\right) = 78.4.° \; con \; la \; horizontal$$

UNIDAD 4. DINÁMICA DE LA PARTÍCULA.

1. Un cuerpo de masa 200 [g], parte del reposo y se desliza por un plano inclinado sin fricción. En el primer segundo a partir de que comenzó a deslizarse, el cuerpo ha recorrido 12 [cm]. Determina, en grados, el ángulo de inclinación del plano.

El cuerpo interactúa con la Tierra y el plano, debido a estas interacciones se tienen dos fuerza actuando sobre él, el peso, $\vec{W} = m\vec{g}$, y la normal, $\vec{N}$, como se muestra en la figura, en la que se incluye el marco de referencia correspondiente.

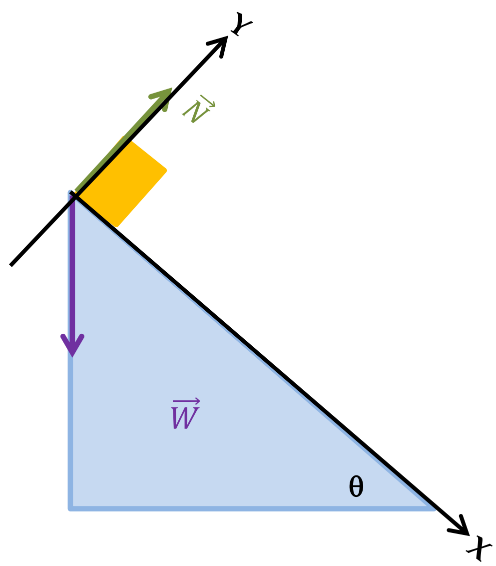
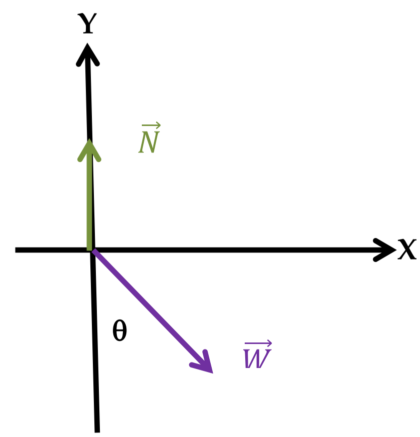


Diagrama de cuerpo



Como el cuerpo sólo se va a deslizar sobre la superficie que corresponde con el eje X, la resultante está contenida en dicho eje.

Se sabe que la fuerza resultante, $\vec{R}$, es la suma de todas las fuerzas externas actuando sobre el cuerpo: $\vec{R} = \vec{W} + \vec{N}$, considerando que la masa del cuerpo es constante, entonces, $\vec{R} = m\vec{a}$.

Escribiendo las componentes explícitas de la suma vectorial, acorde al marco de referencia establecido, se obtiene:

$$|\vec{R}|\hat{\imath} = m|\vec{a}|\hat{\imath} = |\vec{N}|\hat{\jmath} + (m|\vec{g}|sen\theta\hat{\imath} - m|\vec{g}|cos\theta\hat{\jmath}) = m|\vec{g}|sen\theta\hat{\imath} + \left(|\vec{N}| - m|\vec{g}|cos\theta\right)\hat{\jmath}$$

Para que dos vectores sean iguales, sus componentes deben ser iguales, lo que deja el siguiente sistema de ecuaciones escalares:

$$m|\vec{a}| = m|\vec{g}|sen\theta \Longrightarrow |\vec{a}| = |\vec{g}|sen\theta$$

$$|\vec{N}| - m|\vec{g}|cos\theta = 0 \Longrightarrow |\vec{N}| = m|\vec{g}|cos\theta$$

Se tienen dos ecuaciones y tres incógnitas, el ángulo, la magnitud de la normal y la magnitud de aceleración. Para determinar la aceleración se usa cinemática. El movimiento ocurres sólo en X, y es con aceleración constante.

Se sabe que: $a_x = cte;\ a_x = \frac{dv_x}{dt} \Longrightarrow \int_{v_{0x}}^{v_x(t)} dv_x = \int_0^t a_x dt \Longrightarrow v_x(t) = v_{0x} + a_x t$

Como: $v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v_x dt = \int_0^t (v_{0x} + a_x t)dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

Como el objeto parte del reposo y su posición inicial coincide con el origen del marco de referencia, las funciones del tiempo para las componentes de posición y velocidad son:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 \ \ y \ \ v_x(t) = a_x t$$

Como el cuerpo recorre 12 cm en el primer segundo a partir de que comenzó a deslizarse, esto significa que $x(1) = 0.12\ m$, usando esta información en la ecuación para la componente X de posición se obtiene

$$0.12 = \frac{1}{2}a_x(1)^2 \Rightarrow a_x = 0.24\ \left[\frac{m}{s^2}\right] \Rightarrow \vec{a} = 0.24\hat{\imath}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Ahora ya puede completarse la información de dinámica, dado que: $|\vec{a}| = 0.24\left[\frac{m}{s^2}\right]$, se sustituye en:

$$|\vec{a}| = |\vec{g}|sen\theta \Rightarrow sen\theta = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{g}|} = \frac{0.24\left[\frac{m}{s^2}\right]}{9.8\left[\frac{m}{s^2}\right]} \Rightarrow \theta = sen^{-1}\left(\frac{0.24}{9.8}\right)$$

$$\theta = 1.4°$$

UNIDAD 5. TRABAJO Y ENERGÍA.

1. Un objeto de masa 3.0 [g] tiene inicialmente velocidad $\vec{V}_0 = 6\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right]$, que cambia a: $\vec{V} = 8\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right]$ por efecto de una fuerza constante que actúa sobre el objeto durante 1.2 [s]. Determine, en joule, el trabajo que realiza la fuerza en este intervalo de tiempo.

Este ejercicio puede resolverse de forma muy sencilla usando el teorema del trabajo, T, y el cambio en la energía cinética: $T = \Delta E_c$. Se sabe que: $E_c = \frac{1}{2}m\left|\vec{V}\right|^2$.

Primero se transforma la masa a kilogramo, m = 3.0 g = 3.0 × 10^{-3} kg y se calcula la magnitud de las velocidades involucradas:

$$\vec{V}_0 = 6\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right] \Rightarrow \left|\vec{V}_0\right| = \sqrt{(6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\vec{V}_{(1.2)} = 8\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}\left[\frac{m}{s}\right] \Rightarrow \left|\vec{V}_{(1.2)}\right| = \sqrt{(8)^2 + (4)^2} = \sqrt{80}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Por consiguiente

$$T = \Delta E_c = \frac{1}{2}m\left|\vec{V}_{(1.2)}\right|^2 - \frac{1}{2}m\left|\vec{V}_0\right|^2 = \frac{1}{2}m\left\{\left|\vec{V}_{(1.2)}\right|^2 - \left|\vec{V}_0\right|^2\right\}$$

Sustituyendo se obtiene

$$T = \frac{1}{2}(3 \times 10^{-3}kg)\left\{\left(\sqrt{80}\frac{m}{s}\right)^2 - \left(\sqrt{40}\frac{m}{s}\right)^2\right\}$$

$$T = \frac{1}{2}(3 \times 10^{-3}[kg])\left\{80\left[\frac{m^2}{s^2}\right] - 40\left[\frac{m^2}{s^2}\right]\right\} = 60 \times 10^{-3}\left[\frac{kg\ m^2}{s^2}\right]$$

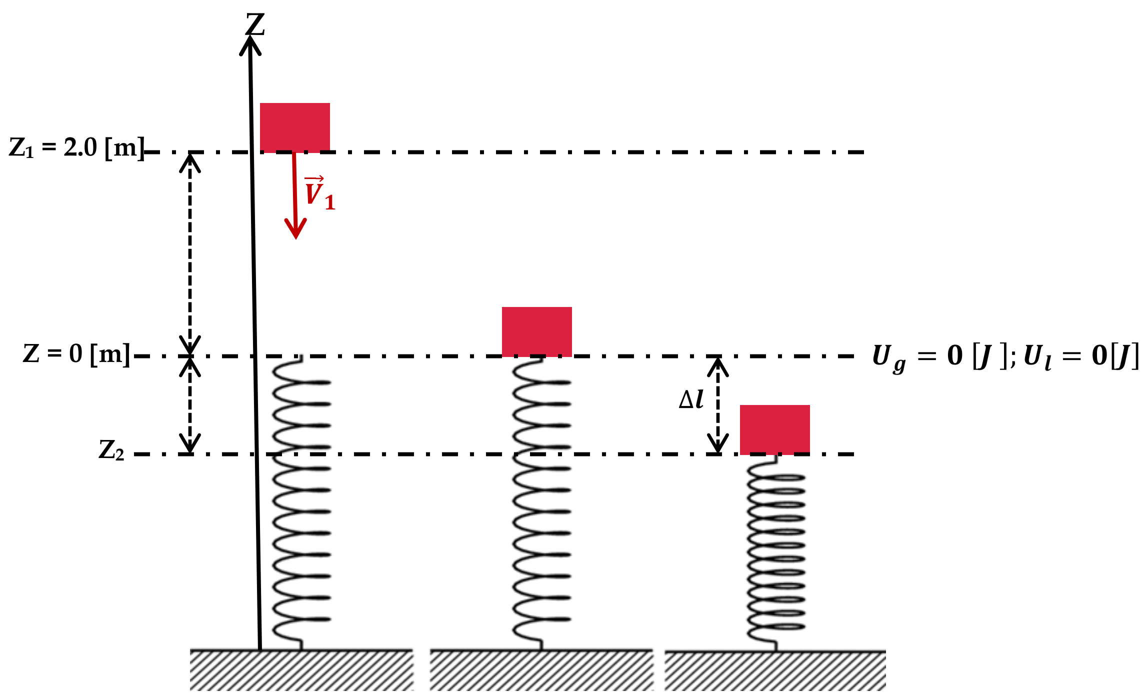
Finalmente simplificando y usando la definición de Joule

$$T = 6 \times 10^{-2}[J]$$

UNIDAD 6. ENERGÍA MECÁNICA.

1. Un bloque de masa 0.5 kg se lanza verticalmente hacia abajo con rapidez de 10.0 m/s. Si dos metros, por debajo del punto de lanzamiento, existe un resorte vertical, k = 7.0 N/m, determine, en m, la máxima compresión que experimenta el resorte por efecto del bloque, ignorando la fricción con el aire y suponiendo un resorte ideal.

La figura siguiente muestra una secuencia para hacer el análisis.



Si se ignora la fricción, entonces el sistema formado por la Tierra, el bloque y el resorte será conservativo, las energías potenciales involucradas serán la energía potencial gravitacional para la Tierra y el bloque, Ug, y la energía potencial elástica para el bloque y el resorte, U_l.
En la figura se indica en donde se considerará el cero de las funciones de energía potencial; en este caso para ambas energías potenciales se escoge el mismo. Con esto pueden escribirse las funciones correspondientes, para la energía potencial gravitacional en las vecindades de la Tierra es

$$U_g = mgz\ [J]$$

En donde m es la masa del bloque, g corresponde a la magnitud de la aceleración de la gravedad que involucra la masa de la Tierra y z es la posición relativa del bloque respecto a la Tierra, medida a partir del cero que se eligió, es importante notar que acorde al marco de referencia inercial elegido, Z_1 será positivo y Z_2 será negativo.

Para la energía potencial elástica del bloque y el resorte

$$U_l = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \; [J]$$

En donde k es la constante elástica del resorte y Δl la deformación que sufre el resorte por la interacción con el bloque. Es importante hacer notar que el tamaño de la deformación máxima que sufre el resorte en este momento, corresponde al tamaño de Z_2.

Para energía cinética, debe recordarse que el sistema involucra el bloque, la Tierra y el resorte, como se considera un resorte ideal, no tiene masa y por consiguiente no tiene asociada energía cinética, pero la Tierra y el bloque si tienen masa y se están moviendo, sin embargo no se considera la energía cinética de la Tierra porque su tamaño comparado con los tamaños de las otras energías involucradas no permitirían notar como cambian las demás, es por esto que sólo se considera la energía cinética del bloque como contribución a la energía mecánica. Con esto en mente la energía mecánica, E_m, será

$$E_m = E_c(bloque) + U_g(Tierra\ y\ bloque) + U_l(resorte\ y\ bloque)$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\left|\vec{V}\right|^2 + mgz + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \; [J]$$

En donde m es la masa y $\left|\vec{V}\right|$ la rapidez del bloque.

Para hacer los cálculos correspondientes, se toma el instante 1, cuando el bloque se lanza verticalmente hacia abajo, esto significa que $Z_1 = 2.0\ [m]$, $(\Delta l_1) = 0\ [m]$, porque el resorte no se ha deformado y $\vec{V}_1 = -10.0\hat{k}\ \left[\frac{m}{s}\right] \Rightarrow \left|\vec{V}_1\right| = 10.0\ \left[\frac{m}{s}\right]$, sustituyendo en E_m,

$$E_{m_1} = \frac{1}{2}(0.5\ [kg])\left(10.0\ \left[\frac{m}{s}\right]\right)^2 + (0.5\ [kg])\left(9.8\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)(2.0\ [m]) = 34.8\ [J]$$

El instante 2 cuando el resorte sufre la máxima compresión, corresponde a que el bloque se detiene momentáneamente $\Rightarrow \vec{V}_2 = \vec{0}\ \left[\frac{m}{s}\right]$, no se conoce el valor explícito de Z_2 y por consiguiente tampoco el $|\Delta l_{máx}| = |Z_2|$. Pero puede escribirse la energía mecánica correspondiente como

$$E_{m_2} = \frac{1}{2}m\left|\vec{V}_2\right|^2 - mg|Z_2| + \frac{1}{2}k(\Delta l_{máx})^2 \; [J]$$

Sustituyendo

$$E_{m_2} = \frac{1}{2}(0.5\ [kg])\left(0\ \left[\frac{m}{s}\right]\right)^2 - (0.5\ [kg])\left(9.8\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)(|Z_2|[m]) + \frac{1}{2}\left(7.0\left[\frac{N}{m}\right]\right)(|Z_2|[m])^2$$

El signo menos en el término de energía potencial gravitacional es por el marco de referencia, simplificando resulta

$$E_{m_2} = -4.9|Z_2| + 3.5\ (|Z_2|)^2\ [J]$$

Como el sistema Tierra, resorte, bloque es conservativo

$$E_{m_2} = E_{m_1} \Rightarrow\ 34.8\ = -4.9|Z_2| + 3.5\ (|Z_2|)^2$$

Finalmente se tiene una ecuación de segundo grado para el tamaño de Z_2,

$$3.5\ (|Z_2|)^2 - 4.9|Z_2| - 34.8 = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene

$$|Z_2| = \frac{4.9 \pm \sqrt{(-4.9)^2 - 4(3.5)(-34.8)}}{2(3.5)} = \begin{Bmatrix} 3.9\ [m] \\ -2.5\ [m] \end{Bmatrix}$$

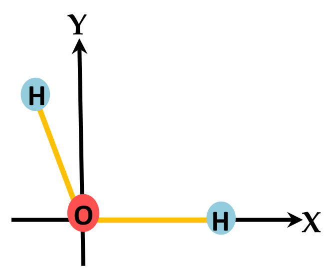
Como se quiere el tamaño de Z_2, el resultado correcto es el valor positivo

$$|\boldsymbol{Z_2}| = \Delta \boldsymbol{l}_{\boldsymbol{m}\acute{\mathbf{a}}\boldsymbol{x}} = \mathbf{3.9}[\boldsymbol{m}]$$

UNIDAD 7. SISTEMA DE PARTÍCULAS.

1. Considere la molécula de agua como una molécula plana y determine la posición del centro de masa, respecto al oxígeno, el ángulo entre enlaces H–O es 104.5° y la longitud de enlace H–O es 95 pm.

Como se considera una molécula plana, sólo se necesita un marco de referencia inercial de dos dimensiones espaciales con el origen en el oxígeno, se hace coincidir uno de los enlaces con el eje X positivo y el otro se encontrará en el segundo cuadrante, como se muestra en la figura.



Entonces, la posición del átomo de oxígeno es el origen:

$$\vec{r}_o = \vec{0}[m]$$

La posición del hidrógeno que se localiza sobre el eje X es:

$$\vec{r}_{H1} = 95\hat{\imath}[pm] = 9.5 \times 10^{-11}\hat{\imath}\ [m]$$

La posición del hidrógeno que se encuentra en el segundo cuadrante es:

$$\vec{r}_{H2} = 95cos104.5°\ \hat{\imath} + 95sen104.5°\hat{\jmath}\ [pm] = -23.8\hat{\imath} + 91.9\hat{\jmath}\ [pm]$$

$$\vec{r}_{H2} = -2.4 \times 10^{-11}\hat{\imath} + 9.2 \times 10^{-11}\hat{\jmath}\ [m]$$

Considerando la molécula de agua como tres partículas puntuales en las tres posiciones escritas, el modelo correspondiente para calcular la posición del centro de masa es el correspondiente a un sistema discreto,

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_l \vec{r}_l}{\sum m_l}$$

Considerando

$$m_H = 1\,u = 1.6604 \times 10^{-27}\ kg \cong 1.7 \times 10^{-27}\ kg$$

$$m_O = 16\,u = 2.6566 \times 10^{-26}\ kg \cong 2.7 \times 10^{-26}\ kg$$

entonces

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_O \vec{r}_O + m_H \vec{r}_{H1} + m_H \vec{r}_{H2}}{m_O + m_H + m_H}$$

Sustituyendo los valores de las masas y las posiciones,

$$\vec{r}_{cm} = \frac{(2.7 \times 10^{-26}\ kg)\vec{0}[m] + (1.7 \times 10^{-27}\ kg)(9.5 \times 10^{-11}\hat{\imath}\ [m]) + (1.7 \times 10^{-27}\ kg)(-2.4 \times 10^{-11}\hat{\imath} + 9.2 \times 10^{-11}\hat{\jmath}\ [m])}{2.7 \times 10^{-26}\ kg + 1.7 \times 10^{-27}\ kg + 1.7 \times 10^{-27}\ kg}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1.6 \times 10^{-37}\hat{\imath} - 4.1 \times 10^{-38}\hat{\imath} + 1.6 \times 10^{-37}\hat{\jmath}}{3.0 \times 10^{-26}}[m] = \frac{1.2 \times 10^{-37}\hat{\imath} + 1.6 \times 10^{-37}\hat{\jmath}}{3.0 \times 10^{-26}}$$

Se obtiene finalmente,

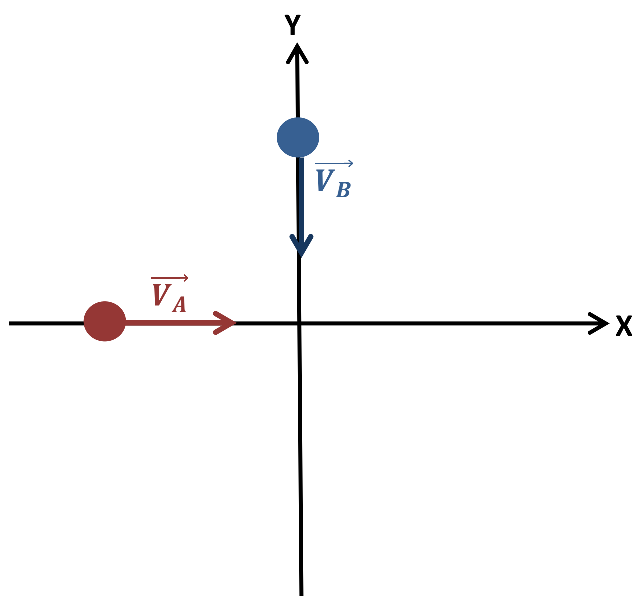
$$\vec{r}_{cm} = 4.0 \times 10^{-12}\hat{\imath} + 5.3 \times 10^{-12}\hat{\jmath}\ [m] = 4.0\hat{\imath} + 5.3\hat{\jmath}\ [pm]$$

Es importante notar que en la posición del centro de masa no se encuentra ninguna de las tres partículas, así como el hecho de que el centro de masa se localiza más cerca del oxígeno que es la partícula con la masa mayor.

UNIDAD 8. COLISIONES.

1. Una masa de 4.0 kg que se mueve con velocidad $\overrightarrow{V_A} = 3\hat{\imath}\ [m/s]$ choca y se adhiere a otra masa de 2.0 kg que se mueve con velocidad $\overrightarrow{V_B} = -4\hat{\jmath}\ [m/s]$. Considerando que el choque es plástico y el ímpetu se conserva, calcule la rapidez que tendrán las masas después de la colisión.

La siguiente figura muestra el esquema de la situación planteada antes de que las masas choquen y suponiendo que chocarán en el origen del marco de referencia.



Uando el principio de conservación del ímpetu, entonces, el ímpetu del sistema antes de la colisión debe ser igual al ímpetu del sistema después de la colisión.

$$\vec{P}_a = \vec{P}_d$$

Antes de la colisión se tienen dos partículas, por consiguiente,

$$\vec{P}_a = m_A\vec{V}_A + m_B\vec{V}_B\ \left[\frac{kg\ m}{s}\right]$$

Después de la colisión como las masas quedan unidas, se considera una sola partícula cuya masa es la suma de masas de las originales,

$$\vec{P}_d = (m_A + m_B)\vec{V} \left[\frac{kg\ m}{s}\right]$$

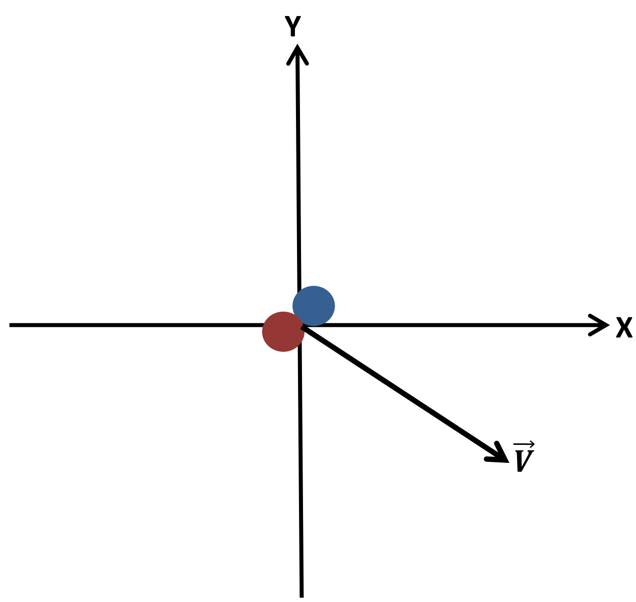
Entonces se debe cumplir

$$m_A\vec{V}_A + m_B\vec{V}_B = (m_A + m_B)\vec{V}$$

Despejando y sustituyendo valores se obtiene

$$\vec{V} = \frac{m_A\vec{V}_A + m_B\vec{V}_B}{m_A + m_B} = \frac{(4\ [kg])(3\hat{\imath}[m/s]) + (2\ [kg])(-4\hat{\jmath}[m/s])}{4\ [kg] + 2\ [kg]} = 2\hat{\imath} - \frac{4}{3}\hat{\jmath} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Entonces después de la colisión el esquema se ve de la siguiente forma



Ahora se calcula la rapidez que es la magnitud de la velocidad que tienen las masas juntas después de la colisión, entonces

$$|\vec{V}| = \sqrt{(2)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = 2.4 \left[\frac{m}{s}\right]$$