

Ejercicio. Electrón en una caja de potencial unidimensional.

Consideremos un electrón que se mueve en una caja (o pozo) de potencial unidimensional, de dimensión  $L = 10 \text{ \AA}$ .

1. ¿Cuál es la energía al ocurrir una transición del nivel  $n = 4$  al nivel  $n = 1$ ?
2. ¿Qué frecuencia de radiación es emitida?
3. ¿A qué región del espectro electromagnético corresponde?
4. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al electrón a la mitad de la caja (alrededor de  $L/10$ ) si se encuentra en el estado  $n = 1$ ?

Solución.

Recordemos las expresiones para las energías permitidas y las funciones de onda:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Entonces, } E_4 = \frac{4^2 x (6.62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}{8 x 9.1 \times 10^{-31} \text{ Kg} (10 \times 10^{-10} \text{ m})^2} = 9.63 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_1 = 0.601 \times 10^{-19} \text{ J, entonces la diferencia es:}$$

$$E_4 - E_1 = 9.029 \times 10^{-19} \text{ J} = h\nu$$

Por tanto,  $\nu = 1.363 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ , o sea  $\lambda = c/\nu = 2.20 \times 10^{-7} \text{ m} = 220 \text{ nm}$  corresponde al UV

Probabilidad:

$$P\left(x = \frac{L}{2}\right) dx = \psi_1(x)^2 dx = \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}\left(\frac{\pi L}{L \cdot 2}\right)\right)^2 \left(\frac{2L}{10}\right) = \frac{4}{10}$$

$$P(x=L/2) = 4/10 = 0.4$$

Nótese que en este caso se tomó  $dx = 2(L/10) = (2L/10)$ , pues se toma la vecindad alrededor de  $x = L/2$

La manera exacta de calcular el problema es hacer la integral siguiente:

$$\text{probabilidad} = \int_{\frac{L}{2} - \frac{L}{10}}^{\frac{L}{2} + \frac{L}{10}} \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{L} x\right) dx$$

Que nos da  $P = 0.387$